Ⅲ. 机械磨损　　　　　　Ⅳ. 无形磨损
(A) Ⅰ、Ⅱ　　　　　　　(B) Ⅱ、Ⅲ
(C) Ⅰ、Ⅳ　　　　　　　(D) Ⅱ、Ⅲ

118. 国外赠款、捐款建设的工程项目应符合下列哪项要求：
(A) 必须委托国外监理单位承担建设监理业务
(B) 必须委托中国监理单位承担建设监理业务
(C) 一般由中国监理单位承担建设监理业务
(D) 一般由国外监理单位和中国监理单位进行合作监理

第二节　基础考试手册样本

一、常用单位和基本物理常数

根据我国现行法定计量单位的要求，下列基本单位和辅助单位大都采用国际单位制(SI)，少数是我国选定的非国际单位制的单位。

(一) 常用国际单位制 (SI) 单位

SI 基本单位　　　　表 1-1

量的名称	量符号	单位名称	国际符号	量的名称	量符号	单位名称	国际符号
长度	l (L)	米	m	热力学温度	T	开（尔文）	K
质量	m	千克（公斤）	kg	物质的量	n	摩（尔）	mol
时间	t	秒	s	发光强度	I (Iv)	坎（德拉）	cd
电流	I	安（培）	A				

SI 辅助单位　　　　表 1-2

量的名称	量符号	单位名称	国际符号	量的名称	量符号	单位名称	国际符号
平面角	α、β、θ、ϕ 等	弧度	rad	立体角	Ω	球面度	sr

SI 常用导出单位　　　　表 1-3

量的名称	单位名称	单位符号	其他表示举例	量的名称	单位名称	单位符号	其他表示举例
频率	赫（兹）	Hz	s^{-1}	电阻	欧（姆）	Ω	V/A
力、重力	牛（顿）	N	$kg\cdot m/s^2$	电导	西（门子）	S	A/V
压力、压强、应力	帕（斯卡）	Pa	N/m^2	磁通量	韦（伯）	Wb	V·s
能量、功、热量	焦（耳）	J	N·m	磁通量密度、磁感应强度	特（斯拉）	T	Wb/m^2
功率、辐射通量	瓦（特）	W	J/s	电感	亨（利）	H	Wb/A
电荷量	库（伦）	C	A·s	摄氏温度	摄氏度	℃	
电位、电压、电动势	伏（特）	V	W/A	光通量	流（明）	lm	cd·sr
电容	法（拉）	F	C/V	光照度	勒（克斯）	lx	lm/m^2

注：本章节中表的排列序号按基础考试手册。

用于构成十进倍数（含分数）单位的词头 表 1-4

表示的因数	词头名称	词头符号	表示的因数	词头名称	词头符号
10^{18}	艾（可萨）	E	10^{-1}	分	d
10^{15}	拍（它）	P	10^{-2}	厘	c
10^{12}	太（拉）	T	10^{-3}	毫	m
10^{9}	吉（伽）	G	10^{-6}	微	μ
10^{6}	兆	M	10^{-9}	纳（诺）	n
10^{3}	千	K	10^{-12}	皮（可）	p
10^{2}	百	h	10^{-15}	飞（母托）	f
10^{1}	十	da	10^{-18}	阿（托）	a

（二）非国际单位制单位及换算关系

我国选定的非国际单位制的一些单位 表 1-5

单位名称	单位名称	单位符号	换算关系
长度	海里	n mile	1n mile = 1852m（只用于航程）
质量	吨	t	$1t = 10^3kg$
体积	升	L（l）	$1L = 1dm^3 = 10^{-3}m^3$
平面角	（角）秒	（″）	1″ = （π/648000） rad
	（角）分	（′）	1′ = （π/10800） rad
	度	（°）	1° = （π/180） rad

（三）基本物理常数

基 本 物 理 常 数 表 1-6

量	符 号	数 值
圆周率	π	3.1415927
自然对数的底	e	2.7182818
真空电容率	ε_0	$8.854187818 \pm 0.000000071) \times 10^{-12} C^2 \cdot N^{-1} \times m^{-2}$
真空磁导率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} H/m = 12.5663706144 \times 10^{-7} H/m$
真空中光速	c	$(2.99792458 \pm 0.000000012) \times 10^8 m/s$
基本电荷（元电荷）	e	$(1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19} C$
普朗克常数	h	$(6.626176 \pm 0.000036) \times 10^{-34} J \cdot S$
阿伏加德罗常数	N_A、L	$(6.022045 \pm 0.000031) \times 10^{23} mol^{-1}$
原子质量单位	$\mu = 10^{-3} Kg \cdot mol^{-1} / N_A$	$(1.6605655 \pm 0.0000086) \times 10^{-27} kg$
法拉第常数	$F = N_A \cdot e$	$(9.648456 \pm 0.000027) \times 10^4 C/mol$
里德伯常数	$R_\infty = \mu_0 m_e e^4 c^3 / 8h^3$	$(1.097373177 \pm 0.000000083) \times 10^7 m^{-1}$
摩尔气体常数	R	(8.31441 ± 0.00026) J/mol·K
标准温标零度	T_0	273.15K
标准大气压	P_0	$1.01325 \times 10^5 Pa$

量	符　号	数　值
理想气体标准摩尔体积	$V_0 = RT_0/P_0$	$(2.241383 \pm 0.000070) \times 10^{-2}\mathrm{m^3/mol}$
理想气体标准数密度	n_0	$(2.6870 \pm 0.0003) \times 10^{25}\mathrm{m^{-3}}$
玻尔兹曼常数	$K = R/N_A$	$(1.380662 \pm 0.000044) \times 10^{-23}\mathrm{J/K}$
引力常数	G	$(6.6720 \pm 0.0027) \times 10^{-11}\mathrm{m^3Kg^{-1}m^{-2}}$
标准自由落体加速度	g_n	$9.80665\mathrm{m/s^2}$
电子伏特	eV	$(1.6021892 \pm 0.0000046) \times 10^{-19}\mathrm{J}$
电子半径	r_e	$(2.8179380 \pm 0.0000070) \times 10^{-15}\mathrm{m}$

二、数学

（一）代数公式

1. 乘法及因式分解公式

（1）$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$　　（2）$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

（3）$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$　　（4）$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

2. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

根 $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$　　判定式 $b^2 - 4ac \begin{cases} >0 & \text{二不等实根} \\ =0 & \text{相等实根} \\ <0 & \text{一对共轭复根} \end{cases}$

3. 对数

若 $x = a^y$ $(a > 0,\ a \neq 1)$，则 $y = \log_a x$.

（1）对数恒等式　$a^{\log_a M} = M$　　（2）$\log_a a = 1$，$\log_a 1 = 0$

（3）$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$　　（4）$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

（5）$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$　　（6）$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

（7）换底公式　$\log_a y = \dfrac{\log_b y}{\log_b a}$

常用对数 $\log_{10} x$ 记为 $\lg x$，自然对数 $\log_e x$ 记为 $\ln x$，其中 $e = 2.71828\cdots$，$\lg x = 0.4343 \cdot \ln x$，$\ln x = 2.3026 \lg x$。

4. 绝对值不等式

（1）$|A + B| \leqslant |A| + |B|$　　（2）$|A - B| \geqslant |A| - |B|$

（3）$-|A| \leqslant A \leqslant |A|$　　（4）$\sqrt{A^2} = |A|$

（5）$|AB| = |A||B|$，$\left|\dfrac{A}{B}\right| = \dfrac{|A|}{|B|}$　　（6）$|A| \leqslant B$ $(B > 0)$，则 $-B \leqslant A \leqslant B$

（二）初等几何

1. 三角形面积 $= \dfrac{1}{2}$底边 × 高

2. 矩形面积 = 长 × 宽

3. 圆面积 $= \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \pi R^2$　圆周长 $= \pi D = 2\pi R$

圆扇形面积 = $\frac{1}{2}R^2\theta$　圆弧长 = $R\theta$

（其中 D 是圆直径，R 是半径，θ 是弧对的圆心角（以弧度计）

4. 圆柱侧面积 = $2\pi RH$，圆柱全面积 = $2\pi R$（$H+R$）

圆柱体积 = $\pi R^2 H$（其中 R 为底半径，H 为柱高）

5. 圆锥侧面积 = πRl（$l=\sqrt{R^2+H^2}$）

圆锥全面积 = πR（$l+R$），圆锥体积 = $\frac{1}{3}\pi R^2 H$（其中 R 为底半径，H 为圆锥高）

6. 球全面积 = $4\pi R^2 = \pi D^2$，球体积 = $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$

（其中 R 为球半径，D 为球直径）

（三）平面三角

1. 度与弧度的换算

$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\theta}{180}$（$\theta$ 与 α 分别表示同一角的度数与弧度数）

$180°=\pi$ 弧度，1 弧度 = 57°17′44″，1° = 0.017 453 29 弧度

2. 特殊角三角函数值

表 2-1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

3. 诱导公式

表 2-2

函数 \ 角	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$	$n\pi\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\pm(-1)^n\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$(-1)^n\cos\alpha$
tg	$-\text{tg}\alpha$	$\mp\text{ctg}\alpha$	$\pm\text{tg}\alpha$	$\mp\text{ctg}\alpha$	$\pm\text{tg}\alpha$	$\pm\text{tg}\alpha$

4. 基本关系公式

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\text{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\sec^2\alpha-\text{tg}^2\alpha=1$，$\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1$，$\csc^2\alpha-\text{ctg}^2\alpha=1$，

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$，$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$，$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$

（四）平面解析几何

1. 两点距离、中点公式

设两点 M_1（x_1，y_1），M_2（x_2，y_2），

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

线段 M_1M_2 中点 M（x，y）的坐标：$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$

2. 直线方程

(1) 一般式　$Ax+By+C=0$

(2) 斜截式　$y=kx+b$，（k 为直线斜率，b 为纵截距）

(3) 点斜式　$y-y_0=k(x-x_0)$，（直线通过点（x_0，y_0），斜率 k）

(4) 截距式　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a\neq 0$，$b\neq 0$），（$a$，$b$ 分别是在 x，y 轴上的截距）

(5) 两点式　$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，（直线过（$x_1$，$y_1$），（$x_2$，$y_2$）两点）

3. 点（x_0，y_0）到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

4. 二直线的相互关系

直线 L_1：$A_1x+B_1y+C_1=0\left(\text{斜率 } k_1=-\frac{A_1}{B_1}\text{，纵截距 } b_1=-\frac{C_1}{B_1}\right)$

直线 L_2：$A_2x+B_2y+C_2=0\left(\text{斜率 } k_2=-\frac{A_2}{B_2}\text{，纵截距 } b_2=-\frac{C_2}{B_2}\right)$

$L_1\parallel L_2\Leftrightarrow k_1=k_2$，$b\neq b_2$，或 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$（符号“$\Leftrightarrow$”表示等价）

$L_1\perp L_2\Leftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}$，或 $A_1A_2+B_1B_2=0$

5. 常见二次曲线方程及其图形

(1) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$——圆心在（a，b），半径为 R 的圆

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）——长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆

(3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$——双曲线，实轴 $=2a$，虚轴 $=2b$，渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$

(4) $xy=k$——以 x，y 轴为渐近线的双曲线，$k>0$ 时，图形在一、三象限，$k<0$ 时，图形在二、四象限

(5) 抛物线方程（$p>0$）

$y^2=2Px$（开口向右）　　$y^2=-2Px$（开口向左）

$x^2=2Py$（开口向上）　　$x^2=-2Py$（开口向下）

（五）向量代数

1. 向量的坐标表示

$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$

模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，单位向量 $\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$

方向余弦　$\cos\alpha=\frac{a_x}{a}$，$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\frac{a_z}{|a|}$

起点为 A（x_1，y_1，z_1），终点为 B（x_2，y_2，z_2）的向量$\overrightarrow{AB}$表示为

$\overrightarrow{AB}=(x^2-x_1)\ \boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\ \boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\ \boldsymbol{k}=\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$

2. 向量运算

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$b=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，$c=\{c_1,\ c_2,\ c_3\}$

(1) $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3\}$，$\lambda a=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}$

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\hat{ab})$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，其模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\hat{ab})$，其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，并且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

3. 向量垂直、平行条件

设 $\boldsymbol{a}=\{a_1\ \ a_2\ \ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1\ \ b_2\ \ b_3\}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为非零向量

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

(六) 空间解析几何

1. 两点距离，中心公式

设两点 M_1（x_1，y_1，z_1），M_2（x_2，y_2，z_2）

$$|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

线段 $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2$ 中点 $\boldsymbol{M}$（x，y）坐标：$x=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y=\frac{y_1+y_2}{2}$，$z=\frac{z_1+z_2}{2}$

2. 平面方程

(1) 一般式　$Ax+By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=\{A,\ B,\ C\}$

(2) 点法式　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，过点（$x_0$，$y_0$，$z_0$），法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,\ B,\ C\}$

(3) 截距式　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$a$，$b$，$c$ 分别是平面在 x，y，z 轴上的截距

3. 直线方程

(1) 对称式　$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$，直线过点（$x_0$，$y_0$，$z_0$），方向向量 $s=\{m,\ n,\ p\}$

(2) 一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ 方向向量 $s=\{A_1, B_1, C_1\}\times\{A_2, B_2, C_2\}$

(3) 参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$ 直线过点 (x_0, y_0, z_0)，方向向量 $s=\{m, n, p\}$

4. 直线、平面之间的关系

设平面Ⅰ：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$；平面Ⅱ：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

直线 L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$；直线 L_2：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

(1) 平行条件

平面Ⅰ∥平面Ⅱ：$n_1 \parallel n_2$

直线 L_1∥直线 L_2：$s_1 \parallel s_2$

直线 L_1∥平面Ⅰ：$s_1 \perp n_1$

(2) 垂直条件

平面Ⅰ⊥平面Ⅱ：$n_1 \perp n_2$

直线 L_1⊥直线 L_2：$s_1 \perp s_2$

直线 L_1⊥平面Ⅰ：$s_1 \parallel n_1$

5. 常用曲面及其方程

球面　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$　（球心 (a, b, c) 半径 R）

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　（a, b, c 为半轴）

母线平行于 z 轴的椭圆柱面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

母线平行 z 轴的圆柱面　$x^2+y^2=R^2$

圆锥面　$z^2=a^2(x^2+y^2)$

椭圆抛物面　$z=\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}$（$p, q$ 同号）

（七）一元函数微分学

1. 极限

(1) 极限运算

$\lim ku = k\lim u$（k 为常数）

$\lim(u+v)=\lim u+\lim v$

$\lim(vu)=\lim u\cdot\lim v$

$\lim\dfrac{u}{v}=\dfrac{\lim u}{\lim v}=\ (\lim v\neq 0)$

(2) 几个极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sim}x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

0)，则说 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

连续函数性质：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，

(1) 在 $[a, b]$ 上至少有一点 x_1，$f(x_1)$ 为最大（或最小）值；

(2) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在 (a, b) 内至少有一点 ζ，$f(\zeta) = 0$.

3. 导数与微分

(1) $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$，或 $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$，亦记为 $y'\Big|_{x = x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x = x_0}$，并称 $dy = f'(x)\,dx$ 为微分。

(2) 微分法则

① $(cu)' = cu'$　　　　$d(cu) = c\,du$（c 为常数）

② $(u + v)' = u' \pm v'$　　　　$d(u + v) = du \pm dv$

③ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$　　　　$d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$

④ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$　　　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

⑤若 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则

$y' = f'(u)\,\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

⑥若 $y = f(x)$ 为 $x = \varphi(y)$ 的反函数，则 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(当 \dfrac{dx}{dy} \neq 0\right)$

2. 连续

设 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\}=0$），则说 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

连续函数性质：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

(1) 在 $[a,b]$ 上至少有一点 x_1，$f(x_1)$ 为最大（或最小）值；

(2) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 ζ，$f(\zeta)=0$.

3. 导数与微分

(1) $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，亦记为 $y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，并称 $dy=f'(x)dx$ 为微分。

(2) 微分法则

① $(cu)'=cu'$　　　　d$(cu)=c\,du$（c 为常数）

② $(u\pm v)'=u'\pm v'$　　　　$d(u\pm v)=du\pm dv$

③ $(u\cdot v)'=u'v+uv'$　　　　$d(u\cdot v)=v\,du+u\,dv$

④ $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$　　　　$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$

⑤若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则

$y'=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

⑥若 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(当\dfrac{dx}{dy}\neq 0\right)$

⑦参数方程：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t),\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$（当 $dx/dt\neq 0$）

(3) 导数公式

① $(c)'=0$　　　　② $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

③ $(\sin x)'=\cos x$　　　　④ $(\cos x)'=-\sin x$

⑤ $(\mathrm{tg}x)'=\sec^2x$，　　　　⑥ $(\mathrm{ctg}x)'=-\csc^2x$

⑦ $(\sec x)'=\sec x\,\mathrm{tg}x$，　　　　⑧ $(\csc x)'=-\csc x\,\mathrm{ctg}x$

⑨ $(a^x)'=a^x\ln a$，　　　　⑩ $(e^x)'=e^x$

⑪ $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　　　⑫ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

⑬ $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　⑭ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑮ $(\mathrm{arc\,tg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　　　⑯ $(\mathrm{arc\,ctg}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

4. 微分学基本定理

(1) 罗尔定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

(2) 拉格朗日中值定理　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在

(a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

5. 导数的应用

(1) 函数的增减性　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

(2) 函数的极值判别法

①若 $f'(x_0)=0$（或 ∞），且在 x_0 邻近，当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$（$f'(x)<0$），当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$　（$f'(x)>0$），则 $f(x_0)$ 为极大值（极小值）。

②若 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\neq 0$，则当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值。

(3) 曲线的凹凸与拐点

若 $f''(x)>0$，曲线（向上）凹；若 $f''(x)<0$，曲线（向上）凸；若 $f''(x_0)=0$，且 x 渐增通过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

(4) 曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$　　法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

(5) 罗必塔法则

若 $\lim f(x)=\lim g(x)=0$ 或 ∞，而 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞），则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上式左端分别称为 $\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式，至于 $0\cdot\infty$，∞，$-\infty$，0^0，1^∞，∞^0 型未定式的极限可化作 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型用上述方法求之。

（八）一元函数积分学

1. 原函数与不定积分

如果在区间 I 内有 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，称 $f(z)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 为常数）为 $f(x)$ 的不定积分，记为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

2. 不定积分法则

(1) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int kf(x)=k\int f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）

(3) $\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int vu'\mathrm{d}x$ 或 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$

(4) $\int f'[\varphi(x)]\mathrm{d}[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]+C$

(5) $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

被积函数含$\sqrt{a^2-x^2}$时，可设 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$

被积函数含$\sqrt{a^2+x^2}$时，可设 $x=a\operatorname{tg} t$

被积函数含$\sqrt{x^2-a^2}$时，可设 $x=a\sec t$

3. 基本积分公式

(1)$\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 是常数）

(2)$\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a} + C$

(5)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C$

(6)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{1}{b-a}\ln\dfrac{x+a}{x+b} + C$

(7)$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

(8)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

(9)$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$

(10)$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

(11)$\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$

(12)$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(13)$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(14)$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(15)$\int \operatorname{tg} x\mathrm{d}x = -\ln\cos x + C$

(16)$\int \operatorname{ctg} x\mathrm{d}x = \ln\sin x + C$

(17)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

(18)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

(19)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) + C$

(20)$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C$

(21)$\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

(22)$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

4. 定积分性质

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(2)$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(3)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

(4)$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

(5) 当 $g(x) \leqslant f(x), a < b$ 时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(6) 若 $m \leqslant f(x) \leqslant M, a < b$，则 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

(7) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \, (a < b)$

(8) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$。

5. 定积分计算法则

(1) 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

(2) $\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$

(3) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$,其中 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, x = \varphi(t)$ 单值有连续导数

(4) 若 $f(x)$ 为偶函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

若 $f(x)$ 为奇函数,则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}(n\text{ 为大于 1 的奇数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}(n\text{ 为正偶数})\end{cases}$

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{u(x)}f(t)\mathrm{d}t = f[u(x)]u'(x)$, $\quad\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^b f(t)\mathrm{d}t = -f[u(x)]u'(x)$

(九) 多元函数微积分

1. 二元函数 $z=f(x, y)$ 的微分法

(1) 偏导数

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, $\quad\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ 或分别记为 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$。

(2) 全微分　若 $z=f(x, y)$ 的各偏导数都存在且连续,则全微分是

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

(3) 复合函数求导法

①设 $z=f(u, v)$, $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$ 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

②设 $z=f(u, v)$, $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$, 则全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

③隐函数微分法,设 $F(x, y)=0$ 确定 y 是 x 的函数,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

(4) 若混合偏导数连续,则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

(5) 方向导数　若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微分,方向 l 与 x 轴正向的夹角为 φ,则沿 l 方向的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

(6) 曲面 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程

切平面 $z-z_0=f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)(y-y_0)$

法线 $$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

(7) 空间曲线 $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ $z=\omega(t)$ 的切线及法平面方程

切线 $$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

其中 t_0 对应曲线上的点 (x_0, y_0, z_0)。

2. 重积分

(1) 用极坐标计算二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(2) 用柱坐标计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

(3) 用球坐标计算三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

其中，r 为原点 O 到点 $M(x, y, z)$ 的距离，φ 为$\overrightarrow{OM}$与 z 轴正向之夹角，θ 是$\overrightarrow{OP}$（P 为 M 在 XOY 面上的投影）与 x 轴正向之夹角，$F(r, \varphi, \theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$。

3. 曲线积分

(1) 对弧长的曲线积分的计算

设曲线弧 L：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)^2]+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

(2) 对坐标的曲线积分的计算

①设有向曲线弧 L：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，且 $t=\alpha$ 对应弧 L 的起点，$t=\beta$ 对应 L 的终点，则有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

②若把弧 L 分为两段 L_1 和 L_2，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

③若以 $-L$ 表示与 L 相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(3) 格林公式　设闭区域 D 的正向边界曲线为 L，$P(x, y)$，$Q(x, y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(4) 曲线积分与路径无关的条件　在上述格林公式的条件下，若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则下述结论成立：

① $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$

②曲线积分与路径无关，只与起点 $M_0(x_0, y_0)$ 及终 $M(x, y)$ 有关，此时曲线积分可写为

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y。$$

4. 积分应用

(1) 几何应用

①由曲线 $y = y_2(x)$ 及 $y = y_1(x)$ $(y_1(x) \leqslant y_2(x))$ 及直线 $x = a$，$x = b$ $(a < b)$ 所围成的图形的面积 $A = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\,\mathrm{d}x$

②平面上闭区域 D（正向边界曲线为 L）的面积

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

③平面图形 $0 \leqslant y \leqslant y(x)$，$a \leqslant x \leqslant b$，绕 x 轴所生成的旋转体体积 $V = \pi\int_a^b [y(x)]^2\mathrm{d}x$

④平面曲线 $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 的弧长

$$s = \int_L \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

⑤设空间区域 Ω 由上、下边界曲面 $z = z_2(x, y)$ 与 $z = z_1(x, y)$ 围成，D 是 Ω 在 XOY 平面上的投影，空间区域 Ω 的体积

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D [z_2(x,y) - z_1(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 物理应用

①平面薄片（占有区域 D）的重心坐标

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma} (\rho(x,y)\text{ 为密度})$$

②平面薄片（占有区域 D）对 x 轴以及对 y 轴的转动惯量分别是

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma, I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

（十）常微分方程

1. 一阶可分离变量微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \text{或} g(y)\,dy=f(x)\,dx$$

解：
$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx$$

2. 一阶线性非齐次微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

解：
$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

3. 可降阶二阶微分方程 $y''=f(x)$

解：
$$y=\int\left\{\int f(x)dx\right\}dx+c_1x+c_2$$

4. 二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$（其中，p、q 为常数），其特征方程为 $r^2+pr+q=0$，设特征方程的根为 r_1，r_2：

（1）当 $r_1\neq r_2$（实根），通解 $Y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{x_2x}$

（2）当 $r_1=r_2=r$（实根），通解 $Y=(c_1+c_2x)e^{rx}$

（3）$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$（复根），通解 $Y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

5. 二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

若有特解 y^*，且它的对应齐次方程通解为 Y，则非齐次微分方程的通解为 $y=Y+y^*$。

特解 y^* 的形式由特征方程的根及自由项 $f(x)$ 决定。见表 2-3：

表 2-3

$f(x)$ 的形式	特解 y^* 的形式
$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ （$P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式）	λ 不是特征方程的根，$y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$ λ 是特征方程的单根，$y^*=e^{\lambda x}xQ_m(x)$ λ 是特征方程的重根，$y^*=e^{\lambda x}x^2Q_m(x)$ （$Q_m(x)$ 是 x 的 m 次多项式）
$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ （A，B 不同时为零）	$\pm\omega i$ 不是特征方程的根，$y^*=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ $\pm\omega i$ 是特征方程的根，$y^*=x(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$

（十一）无穷级数

1. 常数项级数

（1）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收剑，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

（2）比值审敛法：正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（$a_n\geqslant0$），若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$，则当 $\rho<1$ 时级数收敛；$\rho>1$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$）时级数发散，$\rho=1$ 时级数可能收敛也可能发散。

（3）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收剑，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 必收敛，称为绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，称为条件收敛。

（4）莱布尼兹定理：若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$（$a_n>0$）满足（ⅰ）$a_n\geqslant a_{n+1}$（$n=$

1, 2, …), (ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则此级数收敛，且其和 $S \leqslant a_1$，余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leqslant a_{n+1}$。

(5) 等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$（公比 q），前 n 项和 $= \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$当，$|q|<1$ 时级数收敛，和为$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant 1$ 时级数发散。

(6) p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散。特别是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$（称为调和级数）发散，但交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛，此为条件收敛。

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a^{n+1}}{a_n}\right| = \rho \neq 0$，则收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$；若 $\rho=0$，则 $R=+\infty$；若 $\rho=+\infty$，则 $R=0$。

(2) 把函数展开为幂级数

泰勒级数 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$

麦克劳林级数 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$几个函数的展开式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leqslant 1)$$

3. 傅立叶级数

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上可展开为傅立叶级数，则有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

其中 $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$

若 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，则有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx，其中\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx，其中\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x，\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[-l,l]$ 上可展开为傅立叶级数，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中，$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x, a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ 若 $f(x)$ 为奇函数，有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}，\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

若 $f(x)$ 为偶函数，有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}，\ a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\mathrm{d}x，\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

（十二）线性代数

1. 行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1$$

2. 矩阵及其运算

m 行 n 列矩阵简记为 $(a_{ij})_{m\times n}$，即

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

A 的转置矩阵记为 A'（或 A^{T}），A'是把 A 的行换成同序数的列。$(A')'=A$。

若 A 的行数等于列数即 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶方阵。若 $A'=A$，即 $a_{ij}=a_{ji}$（i，j=

1，…，n），称 A 为对称矩阵。若 $A=-A'$称 A 为反对称矩阵。若 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$，$\lambda$

…，λ_n 为数，称 A 为对角矩阵，特别 $\lambda_i=1$（$i=1$，…，n）时称为单位矩阵，记为 E。

矩阵相等：$(a_{ij})_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$，即 $a_{ij}=b_{ij}$

矩阵相加减：$(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$

数 λ 乘矩阵：$\lambda A=\lambda(a_{ij})_{m\times n}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$

矩阵相乘：$A=(a_{ij})_{m\times l}$，$B=(b_{ij})_{l\times n}$，$AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$，对于转置矩阵，有 $(AB)'=B'A'$。

3. 矩阵的秩

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$中不等于零的子行列式的最大阶数称为 A 的秩，记为 $R(A)$。

4. 矩阵行列式，逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵，$|A|$表示 A 的行列式

$$|A'|=|A|,\quad |AB|=|BA|=|A||B|$$

秩 $R(A)=n$ 的充要条件是$|A|\neq 0$，并称 A 为满秩矩阵或非奇异矩阵。

当且仅当 A 为满秩时，存在逆矩阵 A^{-1}，逆矩阵是唯一的。

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$$

其中 A^{*}为 A 的伴随矩阵，形如：

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$，其中 A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式。

5. 矩阵的初等变换

(1) 对调 A 的两行（列）；

(2) 以数 k ($\neq 0$) 乘某一行（列）中所有元素；

(3) 把某一行（列）所有元素的 k 倍加到另一行（列）对应的元素上去。

矩阵经初等变换，其秩不变。

用初等变换求逆矩阵：对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A|E)$ 进行行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变为 A^{-1}。

6. 线性方程组

线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n\end{cases}$$ 的增广矩阵 $$\bar{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

(1)(Ⅰ)有解的充要条件是 $R(A)=R(\bar{A})$，其中 $$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

(2) 方程组有无穷多个解的充要条件是 $R(A)=R(\bar{A})<n$

(3) 方程组有唯一解的充要条是 $R(A)=R(\bar{A})=n$

(4) 当 $m=n$ 时，(Ⅰ)有唯一解的充要条件是 $|A|\neq 0$，其解可表示为

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

其中 $|A_j|$ 是将行列式 $|A|$ 中第 j 列元素相应换为常数项一列元素所得的行列式。

7. 特征值与特征向量

(1) 若 A 是 n 阶方阵,如果数 λ 和 n 维非零列向量 x 使式子 $Ax = \lambda x$(或 $(A-\lambda E)x = 0$)成立,则称 λ 为方阵 A 的特征值,x 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

(2) A 的特征值 λ 是 A 的特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的解。因此,在复数范围内 A 有 n 个特征值(重根按重数计)。

(十三) 概率与数理统计

1. 事件及其运算

随机事件简称事件,必然事件记 Ω(或记 U),不可能事件记$\varnothing$。事件的运算及记号:

(1) 包含 $A\subset B$:事件 A 发生必导致事件 B 发生。

(2) 相等 $A=B$:$A\subset B$ 且 $B\subset A$。

(3) 和 $A\cup B$(或 $A+B$):事件 A、B 中至少有一个发生。

(4) 积 $A\cap B$(或 AB);A、B 两事件同时发生。

(5) $A-B$:事件 A 发生而 B 不发生。

(6) 对立事件:称事件 $\Omega-A$ 为事件 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$。减法运算满足 $A-B=A\overline{B}$。

(7) 互斥事件:若 $A\cap B=\varnothing$,称 A,B 为互斥(或互不相容)事件。

事件运算满足加法和乘法的交换律、结合律及分配律,还满足对偶原理:

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$$

2. 概率定义和计算公式

(1) 古典概率　设等概基本事件组有 n 个元素,导致事件 A 发生的基本事件为 m 个,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

(2) 概率的性质:

①$0\leqslant P(A)\leqslant 1$,$P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$

②$P(A)=1-P(\overline{A})$　或　$P(\overline{A})=1-P(A)$

③$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$(加法公式)

若 A,B 互斥,则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

(3) 条件概率:设 A,B 为事件,$P(A)>0$,在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率称为条件概率,记作 $P(A|B)$,且有关系式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

(4) 乘法公式

$$P(AB)=\begin{cases}P(B)P(A\mid B) & P(B)>0\\ P(A)P(B\mid A) & P(A)>0\end{cases}$$

特别地，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A，B 互相独立。

(5) 全概率公式　如果 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥且 $P(A_i)>0$ $(i=1,\cdots,n)$，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$（或 U），则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

(6) 贝叶斯（逆概）公式：在全概率公式假设下，则有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}(j=1,-,n)$$

3. 一维随机变量的分布函数与分布密度

(1) 设 X 是一随机变量，称函数

$$F(x)=P(X\leqslant x)\ (-\infty<x<\infty)$$

为 X 的分布函数。有如下性质：

① $0\leqslant F(x)\leqslant 1$　$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

② $F(x)$ 是 x 的不减函数

③ $F(x)$ 右连续，即 $\lim\limits_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0)$

(2) 离散型随机变量 X 的概率分布表（分布列）

X	x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
p	p_1	p_2	p_3	…	p_k	…

p_i 是 X 取值 x_i 时的概率，简记为　$p_k=P\{X=x_k\}$。有性质

① $p_k\geqslant 0$ $(k=1,2,\cdots)$

② $\sum\limits_{k}p_k=1$

③分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum\limits_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}$

(3) 连续型随机变量及其分布密度

$F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数，若有非负可积函数 $p(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，对任意 a，b $(a<b)$，使

$$P\{a<X<b\}=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

成立，则称 X 为连续型随机变量，$p(x)$ 为 X 的概率密度函数（简称概率密度或密度）。

性质：① $P(x)\geqslant 0$　② $\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\mathrm{d}x=1$

③ $P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}$

④ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}P(t)\mathrm{d}t$

4. 几种常用的概率分布

(1) 二点分布　X 的分布如下：$P\{X=1\}=p$　$(0<p<1)$

$$P\{X=0\}=q=1-p。$$

(2) 二项分布　X 的分布如下：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}\ (k=0,1,2,\cdots,n)\ (0<p<1,\ q=1-p)$$

记为 $X\sim B(n,p)$

(3) 泊松分布　X 的分布如下：$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2,\cdots,\lambda>0)$ 记为 $X\sim p(\lambda)$

(4) 均匀分布　X 的概率密度为：$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & 当\ a<x<b\\ 0 & 其他\end{cases}$

(5) 指数分布　X 的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & 当\ x\geqslant 0\\ 0 & 当\ x<0\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

(6) 正态分布　X 的概率密度为：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0,\ -\infty<x<+\infty)$$

记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。特别称 $N(0,1)$ 为标准正态分布，它的分布函数记为：

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则有

①$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

②$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

③$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

5. 数学期望的常用公式

随机变量 X 的数学期望记为 $E(X)$

(1) 若 C 为常数，则 $E(C)=C$

(2) 若 k 为常数，则 $E(kX)=kE(X)$

(3) 若 $k_1,k_2,\cdots,k_n,b$ 为常数，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}k_iE(X_i)+b$$

$$E\left(\prod_{i=1}^{n}k_iX_i\right)=\prod_{i=1}^{n}k_iE(X_i)\quad(X_i,X_2,\cdots,X_n\ 为独立随机变量)$$

6. 方差常用公式

随机变量 X 的方差记为 $D(X)$

(1) $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

(2) 若 C 为常数，则 $D(C)=0$

(3) 若 k 为常数，则 $D(kX)=k^2D(X)$

(4) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立随机变量，$k_1,k_2,\cdots,k_n,b$ 均为常数，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+b\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2D(X_i)$$

7. 一些常用分布的期望与方差

(1) 二点分布：$E(X)=p$，$D(X)=p(1-p)$

(2) 二项分布 $B(n,p)$：$E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$

(3) 泊松分布 $P(\lambda)$：$E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

(4) 均匀分布：$E(X)=\frac{1}{2}(b+a)$，$D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$

(5) 指数分布：$E(X)=\frac{1}{\lambda}$，$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

(6) 正态分布：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$

8. 总体、样本及其数字特征

设总体 X，X 的样本 $(X_1,\cdots,X_n)$，样本均值 $\overline{X}$，样本方差 S^2，

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

若考虑两个总体 X、Y 及其相应的样本 $(X_1,\cdots,X_{n_1})$、$(Y_1,\cdots Y_{n_2})$，则样本均值分别记为 $\overline{X}$、$\overline{Y}$，样本方差分别记为 S_1^2、S_2^2。

数理统计常用的分布有正态分布及

(1) x^2 分布，记为 $x^2(n)$，自由度 n。

(2) t 分布，记为 $t(n)$，自由度 n。

(3) F 分布，记为 $F(n_1,n_2)$，自由度 (n_1,n_2)。

以上分布的分布函数表或临界值表见表 2-6～表 2-10。

9. 参数估计

(1) 点估计

总体期望估计值 $E(\hat{X})=\overline{X}$，总体方差估计值 $D(\hat{X})=S^2$

(2) 区间估计

设 θ 是总体的未知参数，对于给定的 α $\{0<\alpha<1\}$，若确定两个值 θ_1、θ_2 满足概率

$$P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$

则区间 (θ_1,θ_2) 称为 θ 的置信区间，θ_1，θ_2 为置信限（或临界值），α 为置信水平，$1-\alpha$ 为置信度。

区间估计的一般步骤：

①选取与被估参数有关的统计量。

②给定 α，查分布表（或临界值表），求出临界值 λ。

③解出置信区间。

10. 假设检验

假设检验是先假设总体具有某种特性，再用统计推断的方法检验假设是否可信，一般步骤为：

(1) 提出假设 H_0。

(2) 选取统计量 Q，明确其分布。

(3) 给定 α，查分布表（或临界值表），求出临界值 λ。

(4) 用样本值计算出统计量的值 Q_0。

(5) 将 Q_0（或 $|Q_0|$）值与 λ 进行比较，作出接受或拒绝 H_0 的判断。

表 2-4

正态总体参数 μ 或 σ^2 的区间估计表

条件与待估参数	统计量及其分布	给定 α，确定临界值 λ（或 λ_1、λ_2）	置信区间
已知 σ^2 估计 μ	$\frac{\sqrt{n}\ (\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N\ (0,\ 1)$	$P\ \{u<\lambda\}\ =1-\frac{\alpha}{2}$ 查标准正态分布表	$\mu\in\left(\overline{X}-\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
未知 σ^2 估计 μ	$\frac{\sqrt{n}\ (\overline{X}-\mu)}{S} \sim t\ (n,\ 1)$	$P\ \{\|t\|>\lambda\}\ =\alpha$ 查 t 分布临界值表	$\mu\in\left(\overline{X}-\lambda\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+\lambda\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
估计 σ^2	$\frac{(n-1)\ S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2\ (n-1)$	$P\ \{\chi^2>\lambda_1\}\ =1-\frac{\alpha}{2}$ $P\ \{\chi^2>\lambda_2\}\ =\frac{\alpha}{2}$ 查 χ^2 分布临界值表	$\sigma^2\in\left(\frac{(n-1)\ S^2}{\lambda_2},\ \frac{(n-1)\ S^2}{\lambda_1}\right)$

表 2-5

正态总体期望或方差检验表

条件与检验	假设 H_0	统计量及其分布	给定 α，确定临界值 λ（或 λ_1、λ_2）	在给定 α 下拒绝 H_0 的条件
已知 σ^2 检验 μ	$\mu=\mu_0$ μ_0 为已知数	$U=\frac{\sqrt{n}\ (\overline{X}-\mu_0)}{\sigma} \sim N\ (0,\ 1)$	$P\ \{u<\lambda\}\ =1-\frac{\alpha}{2}$ 查标准正态分布表	$U_0\geqslant\lambda$
未知 σ^2 检验 μ	$\mu=\mu_0$ μ_0 为已知数	$T=\frac{\sqrt{n}\ (\overline{X}-\mu_0)}{S} \sim t\ (n-1)$	$P\ \{\|t\|>\lambda\}\ =\alpha$ 查 t 分布临界值表	$\|T_0\|\geqslant\lambda$
未知 μ 检验 σ^2	$\sigma^2=\sigma_0^2$ σ_0^2 为已知数	$\chi^2=\frac{(n-1)\ S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2\ (n-1)$	$P\ \{\chi^2>\lambda_1\}\ =1-\frac{\alpha}{2}$ $P\ \{\chi^2>\lambda_2\}\ =\frac{\alpha}{2}$ 查 χ^2 分布临界值表	$\chi_0^2\leqslant\lambda_1$ 或 $\chi_0^2\geqslant\lambda_2$
未知 μ 检验 σ^2	$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$ σ_0 为已知数		$P\ \{\chi^2>\lambda\}\ =\alpha$ 查 χ^2 分布临界值表	$\chi_0^2\geqslant\lambda$
未知 μ_1、μ_2 检验 σ_1^2、σ_2^2	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F\ (n_1-1,\ n_2-1)$	$P\ \{F>\lambda_2\}\ =\frac{\alpha}{2}$，$\lambda_1=\frac{1}{\lambda_2}$ 查 F 分布临界值表	$F_0\leqslant\lambda_1$ 或 $F_0\geqslant\lambda_2$

11. 线性回归分析

(1) 回归方程

设 $(x_1,\ y_1)$，… $(x_n,\ y_n)$ 是变量 x 与 y 相应的观测值（点），若直线

l：
$$y=a+bx$$

使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2=$ 最小值，则 l 称为一元回归方程，a、b 为回归系数。

(2) 回归系数：
$$b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}},\ a=\overline{y}-\overline{bx}$$

$$\text{其中}\quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\quad l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

(3) 相关系数 $R=\dfrac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}$，其中 $l_{yy}=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$

①$|R|\leqslant 1$　$|R|$值越大，相关程度越大。

②$|R|=1$时，称y与x完全线性相关。观测点落在一条直线上。

③$|R|=0$时，称y与x全无线性相关。

(十四) 向量分析

1. 矢性函数的导数（导矢）

设矢性函数 $\vec{A}=\vec{A}(t)=A_x(t)\vec{i}+A_y(t)\vec{j}+A_z(t)\vec{k}$,

导矢为：

$$\vec{A}'(t)=A'_x(t)\vec{i}+A'_y(t)\vec{j}+A'_z(t)\vec{k}$$

它是矢端曲线的切向量。

设质点运动矢径 $\vec{r}=\vec{r}(t)$，则$\vec{r}'(t)$是质点运动的速度矢量，$\vec{r}''(t)$是加速度矢量。

2. 导数公式

$\dfrac{d\vec{C}}{dt}=0$　（$\vec{C}$为常矢）

$\dfrac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\dfrac{d\vec{A}_1}{dt}+\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

$\dfrac{d}{dt}(k\vec{A})=k\dfrac{d\vec{A}}{dt}$（$k$为常数）

$\dfrac{d}{dt}(u\vec{A})=\dfrac{du}{dt}\vec{A}+u\dfrac{d\vec{A}}{dt}$（$u$为数量函数）

$\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{dt}+\dfrac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$

$\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}+\dfrac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$

若 $\vec{A}=\vec{A}(u)$，$u=u(t)$，则$\dfrac{d\vec{A}}{dt}=\dfrac{d\vec{A}}{du}\cdot\dfrac{du}{dt}$

3. 矢性函数的不定积分

若$\vec{B}'(t)=A(t)$，则$\int\vec{A}(t)dt=B(t)+\vec{C}$（$\vec{C}$为任意常矢）

$$\int\vec{A}(t)dt=\left(\int A_x(t)dt\right)\vec{i}+\left(\int A_y(t)dt\right)\vec{j}+\left(\int A_z(t)dt\right)\vec{k}$$

公式：$\int k\vec{A}(t)dt=k\int\vec{A}(t)dt$（$k$为常数）

$\int\vec{a}\cdot\vec{A}(t)dt=\vec{a}\cdot\int\vec{A}(t)dt$（$\vec{a}$为常矢）

$\int[\vec{A}(t)\pm\vec{B}(t)]dt=\int\vec{A}(t)dt\pm\int\vec{B}(t)dt$

4. 矢性函数的定积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(t)\mathrm{d}t = \vec{B}(t_2) - \vec{B}(t_1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(t)\mathrm{d}t = \left(\int_{t_1}^{t_2}A_x(t)\mathrm{d}t\right)\vec{i} + \left(\int_{t_1}^{t_2}A_y(t)\mathrm{d}t\right)\vec{j} + \left(\int_{t_1}^{t_2}A_z(t)\mathrm{d}t\right)\vec{k}$$

正态分布数值表 表 2-6

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.80	0.7881	1.60	0.9452	2.35	0.9906
0.05	0.5199	0.85	0.8023	1.65	0.9505	2.40	0.9918
0.10	0.5398	0.90	0.8159	1.70	0.9554	2.45	0.9929
0.15	0.5596	0.95	0.8289	1.75	0.9599	2.50	0.9938
0.20	0.5793	1.00	0.8413	1.80	0.9641	2.55	0.9946
0.25	0.5987	1.05	0.8531	1.85	0.9678	2.58	0.9951
0.30	0.6179	1.10	0.8643	1.90	0.9713	2.60	0.9953
0.35	0.6368	1.15	0.8749	1.95	0.9744	2.65	0.9960
0.40	0.6554	1.20	0.8849	1.96	0.9750	2.70	0.9965
0.45	0.6736	1.25	0.8944	2.00	0.9772	2.75	0.9970
0.50	0.6915	1.30	0.9032	2.05	0.9798	2.80	0.9974
0.55	0.7088	1.35	0.9115	2.10	0.9821	2.85	0.9978
0.60	0.7257	1.40	0.9192	2.15	0.9842	2.90	0.9981
0.65	0.7422	1.45	0.9265	2.20	0.9861	2.95	0.9984
0.70	0.7580	1.50	0.9332	2.25	0.9878	3.00	0.9987
0.75	0.7731	1.55	0.9394	2.30	0.9893	4.00	1.0000

[注] $P\{u \leqslant x\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

t 分布临界值表 表 2-7

n \ λ \ α	0.10	0.05	0.01	n \ λ \ α	0.10	0.05	0.01
1	6.314	12.706	63.657	18	1.734	2.101	2.878
2	2.920	4.303	9.925	19	1.729	2.093	2.861
3	2.353	3.182	5.841	20	1.725	2.086	2.845
4	2.132	2.776	4.604	21	1.721	2.080	2.831
5	2.015	2.571	4.032	22	1.717	2.074	2.819
6	1.943	2.447	3.707	23	1.714	2.069	2.807
7	1.895	2.365	3.499	24	1.711	2.064	2.797
8	1.860	2.306	3.355	25	1.708	2.060	2.787
9	1.833	2.262	3.250	26	1.706	2.056	2.779
10	1.812	2.228	3.169	27	1.703	2.052	2.771
11	1.796	2.201	3.106	28	1.701	2.048	2.763
12	1.782	2.179	3.055	29	1.699	2.045	2.756
13	1.771	2.160	3.012	30	1.697	2.042	2.750
14	1.761	2.145	2.977	40	1.684	2.021	2.704
15	1.753	2.131	2.947	60	1.671	2.000	2.660
16	1.746	2.120	2.921	120	1.658	1.980	2.617
17	1.740	2.110	2.898	∞	1.645	1.960	2.576

[注] n 是自由度；λ 是临界值，$P\{|t| > \lambda\} = \alpha$。

表 2-8

x^2 分布临界值表

n \ α (λ)	0.975	0.05	0.025	0.01	n \ α (λ)	0.975	0.05	0.025	0.01
1	0.00098	3.84	5.02	6.63	16	6.91	26.3	28.8	32.0
2	0.0506	5.99	7.38	9.21	17	7.56	27.6	30.2	33.4
3	0.216	7.81	0.35	11.3	18	8.23	28.9	31.5	34.8
4	0.484	9.49	11.1	13.3	19	8.91	30.1	32.9	36.2
5	0.831	11.07	12.8	15.1	20	9.59	31.4	34.2	37.6
6	1.24	12.6	14.4	16.8	21	10.3	32.7	35.5	38.9
7	1.69	14.1	16.0	18.5	22	11.0	33.9	36.8	40.3
8	2.18	15.5	17.5	21.1	23	11.7	35.2	38.1	41.6
9	2.70	16.9	19.0	21.7	24	12.4	36.4	39.4	43.0
10	3.25	18.3	20.5	23.2	25	13.1	37.7	40.6	44.3
11	3.82	19.7	21.9	24.7	26	13.8	38.9	41.9	45.6
12	4.40	21.0	23.3	26.2	27	14.6	40.1	43.2	47.0
13	5.01	22.4	24.7	27.7	28	15.3	41.3	44.5	48.3
14	5.63	23.7	26.1	29.1	29	16.0	42.6	45.7	49.6
15	6.26	25.0	27.5	30.6	30	16.8	43.8	47.0	50.9

［注］ n 是自由度；λ 是临界值，$P\{x^2 > \lambda\} = \alpha$。

表 2-9

F 分布临界值表 ($\alpha = 0.05$)

n_2 \ n_1 (λ)	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	243.9	249.1	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.69	2.51	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.20	2.01	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.18	1.98	1.73

三、物理（声、光、热）

（一）声强

$$I = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2$$

式中，ρ：媒质密度，u：声速，ω：圆频率，A：声振动的振幅

（二）麦克斯韦速率分布函数

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\pi v^2}{2kT}} v^2$$

式中，μ：气体分子质量，T：气体处于热平衡下的温度，k：玻耳兹曼常数

（三）三种统计速度

最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}}$$

平均速率

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}$$

方均根速率

$$\sqrt{\bar{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}}$$

式中：μ：气体分子质量，k：玻耳兹曼常数

（四）理想气体分子的平均碰撞频率

$$\bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$$

式中，d：分子直径，n：分子数密度，$\bar{v}$：分子平均速率

（五）理想气体绝热作功表达式

$$A = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\nu - 1}$$

式中：ν：摩尔热容化

四、化学

（一）基本常数

N_A	阿佛加德罗（Avogadro）常数	$6.022 \times 10^{23} mol^{-1}$
R	摩尔气体常数	$8.314 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
V_m	理想气体摩尔体积 （$T_0 = 273.15K$，$P_0 = 101.3kPa$）	$2.24 \times 10^{-2} m^3 \cdot mol^{-1}$
F	法拉第（Faraday）常数	$96485 C \cdot mol^{-1}$

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.75	1.52	1.00

［注］ n_1是第一自由度，n_2是第二自由度；λ是临界值，$P\{F>\lambda\}=\alpha=0.05$。

表 2-10

标准正态分布的分布函数表

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 6	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 4	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.831 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1.0	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.866 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.711 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 9	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.942 9	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.954 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 9	0.965 6	0.966 4	0.967 1	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.969 9	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 1	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 5	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6
3.0	0.998 7	0.998 7	0.998 7	0.998 8	0.998 8	0.998 9	0.998 9	0.998 9	0.999 0	0.999 0
3.1	0.999 0	0.999 1	0.999 1	0.999 1	0.999 2	0.999 2	0.999 2	0.999 2	0.999 3	0.999 3
3.2	0.999 3	0.999 3	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 4	0.999 5	0.999 5	0.999 5
3.3	0.999 5	0.999 5	0.999 5	0.999 6	0.999 6	0.999 6	0.999 6	0.999 6	0.999 6	0.999 7
3.4	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 7	0.999 8

表 4-1

一些溶剂的沸点上升常数和凝固点下降常数

溶　剂	沸点/（℃）	K_{bp}/（K·kg·mol⁻¹）	凝固点/（℃）	K_{fp}/（K·kg·mol⁻¹）
醋酸	118.1	2.93	17	3.9
苯	80.2	2.53	5.4	5.12
氯仿	61.2	3.63	—	—
萘	217.9	5.80	80	6.8
水	100.0	0.51	0	1.86

表 4-2

一些弱电解质在水溶液中的电离常数

电解质	电离方程式	电离常数（K）	温度/℃
醋酸	$HAc \rightleftharpoons H^+ + Ac^-$	1.75×10^{-5}（K_a）	25
碳酸	$CO_2 + H_2O \rightleftharpoons H^+ + HCO_3^-$	4.30×10^{-7}（K_{a1}）	25
	$HCO_3^- \rightleftharpoons H^+ + CO_3^{2-}$	5.61×10^{-11}（K_{a2}）	25
氢氰酸	$HCN \rightleftharpoons H^+ + CN^-$	4.93×10^{-10}（K_a）	25
氢氟酸	$HF \rightleftharpoons H^+ + F^-$	3.53×10^{-4}（K_a）	25
氨水	$NH_3 + H_2O \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$	1.79×10^{-5}（K_b）	25

表 4-3

一些物质的溶度积常数 K_{sp}

难溶物质	化　学　式	溶度积常数 K_{sp}	温度/℃
氯化银	$AgCl$	1.56×10^{-10}	25
硫酸钡	$BaSO_4$	1.08×10^{-10}	25
碳酸钙	$CaCO_3$	8.7×10^{-9}	25
磷酸钙	$Ca_3(PO_4)_2$	2.0×10^{-29}	25
氢氧化铁	$Fe(OH)_3$	1.1×10^{-36}	18
氢氧化镁	$Mg(OH)_2$	1.8×10^{-11}	18

表 4-4

一些电对的标准电极电势

电　对	电　极　反　应	电极电势/V
（氧化态/还原态）	氧化态 + ne $\rightleftharpoons$ 还原态	
Na^+/Na	$Na^+ + e \rightleftharpoons Na$	−2.711
Zn^{2+}/Zn	$Zn^{2+} + 2e \rightleftharpoons Zn$	−0.763
Fe^{2+}/Fe	$Fe^{2+} + 2e \rightleftharpoons Fe$	−0.440
Ni^{2+}/Ni	$Ni^{2+} + 2e \rightleftharpoons Ni$	−0.230
H^+/H_2	$H^2 + e \rightleftharpoons \frac{1}{2}H_2$	0.000
$AgCl/Ag$	$AgCl + e \rightleftharpoons Ag + Cl^-$	+0.222
Hg_2Cl_2/Hg	$Hg_2Cl_2 + 2e \rightleftharpoons 2Hg + 2Cl^-$	+0.268
O_2/OH^-	$\frac{1}{2}O_2 + H_2O + 2e \rightleftharpoons 2OH^-$	+0.401
I_2/I^-	$I_2 + 2e \rightleftharpoons 2I^-$	+0.535
Fe^{3+}/Fe^{2+}	$Fe^{3+} + e \rightleftharpoons Fe^{2+}$	+0.771
Ag^+/Ag	$Ag^+ + e \rightleftharpoons Ag$	+0.7996
Hg^{2+}/Hg	$Hg^{2+} + 2e \rightleftharpoons Hg$	+0.851
MnO_2/Mn^{2+}	$MnO_2 + 4H^+ + 2e \rightleftharpoons Mn^{2+} + 2H_2O$	+1.208
O_2/H_2O	$O_2 + 4H^+ + 4e \rightleftharpoons 2H_2O$	+1.229
$Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$	$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + 6e \rightleftharpoons 2Cr^{3+} + 7H_2O$	+1.33
Cl_2/Cl^-	$Cl_2 + 2e \rightleftharpoons 2Cl^-$	+1.358
MnO_4/Mn^{2+}	$MnO_4^- + 8H^+ + 5e \rightleftharpoons Mn^{2+} + 4H_2O$	+1.491

（二）基本公式

1. 水的蒸气压方程

$$\lg\frac{P_2}{P_1}=\frac{-\Delta H^{\ominus}}{2.303R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$$

式中 $\Delta H^{\ominus}$——水的标准气化热 373.16K 40.66kJ·mol^{-1}。

2. 拉乌尔定律

$$\Delta P = P_A^0 X_B$$

式中 ΔP——蒸气压下降；

P_A^0——纯溶剂的蒸气压；

X_B——溶质摩尔分数。

3. 沸点上升数学式

$$\Delta T_{bp} = k_{bp}\cdot m$$

式中 ΔT_{bp}——沸点上升；

k_{bp}——沸点上升常数；

m——溶液的质量摩尔浓度。

4. 凝固点下降数学式

$$\Delta T_{fp} = k_{fp}\cdot m$$

式中 ΔT_{fp}——凝固点下降；

k_{fp}——凝固点下降常数；

m——溶液的质量摩尔浓度。

5. 阿仑尼乌斯公式（S. Arrhenius）

$$k = ze^{-\varepsilon/KT}$$

式中 k——速率常数；

z——指前因子；

ε——活化能。

6. 速率与温度的关系式

$$\lg\frac{k_{T_2}}{k_{T_1}}=\frac{-\varepsilon}{2.303R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$$

7. 平衡常数与温度关系式

$$\lg\frac{K_2}{K_1}=\frac{-\Delta H^{\ominus}}{2.303R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)$$

式中 $\Delta H^{\ominus}$——标准反应热。

8. 能斯特方程式（W. Nernst）

$$\varphi=\varphi^{\ominus}+\frac{0.05917}{n}\lg\frac{[\text{氧化态}]^a}{[\text{还原态}]^b}$$

9. 平衡常数与标准电动势的关系式

$$\lg K=\frac{nE^{\ominus}}{0.05917}$$

（三）元素周期表

元素周期表

主族金属　过渡金属　内过渡金属　准金属　非金属　稀有气体

	47 Ag	
原子序数	47	元素符号，红色指放射性元素
元素名称	银	
注*的是人造元素	$4d^{10}5s^1$	外围电子层排布，括号指可能的电子层排布
	107.9	原子量

周期＼族	ⅠA	ⅡA	ⅢB	ⅣB	ⅤB	ⅥB	ⅦB	Ⅷ			ⅠB	ⅡB	ⅢA	ⅣA	ⅤA	ⅥA	ⅦA	0	电子层	ⅧA族电子数
1	1 H 氢 $1s^1$ 1.008																	2 He 氦 $1s^2$ 4.003	K	2
2	3 Li 锂 $2s^1$ 6.941	4 Be 铍 $2s^2$ 9.012											5 B 硼 $2s^22p^1$ 10.81	6 C 碳 $2s^22p^2$ 12.01	7 N 氮 $2s^22p^3$ 14.01	8 O 氧 $2s^22p^4$ 16.00	9 F 氟 $2s^22p^5$ 19.00	10 Ne 氖 $2s^22p^6$ 20.18	L K	8 2
3	11 Na 钠 $3s^1$ 22.99	12 Mg 镁 $3s^2$ 24.31											13 Al 铝 $3s^23p^1$ 26.98	14 Si 硅 $3s^23p^2$ 28.09	15 P 磷 $3s^23p^3$ 30.97	16 S 硫 $3s^23p^4$ 32.07	17 Cl 氯 $3s^23p^5$ 35.45	18 Ar 氩 $3s^23p^6$ 39.95	M L K	8 8 2
4	19 K 钾 $4s^1$ 39.10	20 Ca 钙 $4s^2$ 40.08	21 Sc 钪 $3d^14s^2$ 44.96	22 Ti 钛 $3d^24s^2$ 47.88	23 V 钒 $3d^34s^2$ 50.94	24 Cr 铬 $3d^54s^1$ 52.00	25 Mn 锰 $3d^54s^2$ 54.94	26 Fe 铁 $3d^64s^2$ 55.85	27 Co 钴 $3d^74s^2$ 58.93	28 Ni 镍 $3d^84s^2$ 58.69	29 Cu 铜 $3d^{10}4s^1$ 63.55	30 Zn 锌 $3d^{10}4s^2$ 65.39	31 Ga 镓 $4s^24p^1$ 69.72	32 Ge 锗 $4s^24p^2$ 72.61	33 As 砷 $4s^24p^3$ 74.92	34 Se 硒 $4s^24p^4$ 78.96	35 Br 溴 $4s^24p^5$ 79.90	36 Kr 氪 $4s^24p^6$ 83.80	N M L K	8 18 8 2
5	37 Rb 铷 $5s^1$ 85.47	38 Sr 锶 $5s^2$ 87.62	39 Y 钇 $4d^15s^2$ 88.91	40 Zr 锆 $4d^25s^2$ 91.22	41 Nb 铌 $4d^45s^1$ 92.91	42 Mo 钼 $4d^55s^1$ 95.94	43 Tc 锝 $4d^55s^2$ [98]	44 Ru 钌 $4d^75s^1$ 101.1	45 Rh 铑 $4d^85s^1$ 102.9	46 Pd 钯 $4d^{10}$ 106.4	47 Ag 银 $4d^{10}5s^1$ 107.9	48 Cd 镉 $4d^{10}5s^2$ 112.4	49 In 铟 $5s^25p^1$ 114.8	50 Sn 锡 $5s^25p^2$ 118.7	51 Sb 锑 $5s^25p^3$ 121.8	52 Te 碲 $5s^25p^4$ 127.6	53 I 碘 $5s^25p^5$ 126.9	54 Xe 氙 $5s^25p^6$ 131.3	O N M L K	8 18 18 8 2
6	55 Cs 铯 $6s^1$ 132.9	56 Ba 钡 $6s^2$ 137.3	57-71 La-Lu 镧系	72 Hf 铪 $5d^26s^2$ 178.5	73 Ta 钽 $5d^36s^2$ 180.9	74 W 钨 $5d^46s^2$ 183.9	75 Re 铼 $5d^56s^2$ 186.2	76 Os 锇 $5d^66s^2$ 190.2	77 Ir 铱 $5d^76s^2$ 192.2	78 Pt 铂 $5d^96s^1$ 195.1	79 Au 金 $5d^{10}6s^1$ 197.0	80 Hg 汞 $5d^{10}6s^2$ 200.6	81 Tl 铊 $6s^26p^1$ 204.4	82 Pb 铅 $6s^26p^2$ 207.2	83 Bi 铋 $6s^26p^3$ 209.0	84 Po 钋 $6s^26p^4$ [209]	85 At 砹 $6s^26p^5$ [210]	86 Rn 氡 $6s^26p^6$ [222]	P O N M L K	8 18 32 18 8 2
7	87 Fr 钫 $7s^1$ [223]	88 Ra 镭 $7s^2$ 226.0	89-103 Ac-Lr 锕系	104 Unq * $(6d^27s^2)$ [261]	105 Unp * $(6d^37s^2)$ [262]	106 Unh * $(6d^47s^2)$ [263]	107 Uns * $(6d^57s^2)$ [262]	108 Uno * $(6d^67s^2)$ [265]	109 Une * $(6d^77s^2)$ [266]											

镧系	57 La 镧 $5d^16s^2$ 138.9	58 Ce 铈 $4f^15d^16s^2$ 140.1	59 Pr 镨 $4f^36s^2$ 140.9	60 Nd 钕 $4f^46s^2$ 144.2	61 Pm 钷 $4f^56s^2$ [145]	62 Sm 钐 $4f^66s^2$ 150.4	63 Eu 铕 $4f^76s^2$ 152.0	64 Gd 钆 $4f^75d^16s^2$ 157.3	65 Tb 铽 $4f^96s^2$ 158.9	66 Dy 镝 $4f^{10}6s^2$ 162.5	67 Ho 钬 $4f^{11}6s^2$ 164.9	68 Er 铒 $4f^{12}6s^2$ 167.3	69 Tm 铥 $4f^{13}6s^2$ 168.9	70 Yb 镱 $4f^{14}6s^2$ 173.0	71 Lu 镥 $4f^{14}5d^16s^2$ 175.0
锕系	89 Ac 锕 $6d^17s^2$ 227.0	90 Th 钍 $6d^27s^2$ 232.0	91 Pa 镤 $5f^26d^17s^2$ 231.0	92 U 铀 $5f^36d^17s^2$ 238.0	93 Np 镎 $5f^46d^17s^2$ 237.0	94 Pu 钚 $5f^67s^2$ [244]	95 Am 镅* $5f^77s^2$ [243]	96 Cm 锔* $5f^76d^17s^2$ [247]	97 Bk 锫* $5f^97s^2$ [247]	98 Cf 锎* $5f^{10}7s^2$ [251]	99 Es 锿* $5f^{11}7s^2$ [252]	100 Fm 镄* $5f^{12}7s^2$ [257]	101 Md 钔* $(5f^{13}7s^2)$ [258]	102 No 锘* $(5f^{14}7s^2)$ [259]	103 Lr 铹* $(5f^{14}6d^17s^2)$ [260]

注：
1. 原子量录自 1985 年国际原子量表，并全部取四位有效数字。
2. 原子量加括号的为放射性元素的半衰期最长的同位素的质量数。

五、理论力学

（一）静力学部分

1. 力系的合成

（1）汇交力系与力偶系的合成

力系若不是平衡力系，其合成结果如表 5-1

表 5-1

	汇交力系	力偶系
合成结果	合力 $R = EF_i$ 作用线通过汇交点	合力偶$\begin{cases}\text{空间：} m = \Sigma m_i \\ \text{平面：} m = \Sigma m_i\end{cases}$

（2）任意力系的合成

以点 O 为简化中心，任意力系合成的一般结果为：

$$\begin{cases}\text{一个力 } R' = \Sigma F_i \quad \text{作用线通过 } O \text{ 点} \\ \text{一个力偶}\begin{cases}\text{空间：} M_0 = \Sigma m_0\ (F_i) \\ \text{平面：} M_0 = \Sigma m_0\ (F_i)\end{cases}\end{cases}$$

R'称原力系的主矢，与简化中心位置无关。

M_0（或 M_0）称原力系对 O 点的主矩，与简化中心位置有关。

2. 平衡方程

表 5-2

力系名称		平衡方程	独立方程的数目
平面力系	力偶系	$\Sigma m_i = 0$	1
	汇交力系	$\Sigma X_i = 0$，$\Sigma Y_i = 0$ 或 $\Sigma X_i = 0$，$\Sigma m_A\ (F_i) = 0$（汇交点 O 与 A 点连线不垂直 x 轴） 或 $\Sigma m_A = (F_i) = 0$，$\Sigma m_B = (F_i) = 0$（O、A，B 三点不共线）	2
	平行力系	$\Sigma Y_i = 0$，$\Sigma m_0\ (F_i) = 0$（y 轴不垂直 F_i） 或 $\Sigma m_A\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_B\ (F_i) = 0$（A，B 连线不平行 F_i）	2
	任意力系	$\Sigma X_i = 0$，$\Sigma Y_i = 0$，$\Sigma m_0\ (F_i) = 0$ 或 $\Sigma X_i = 0$，$\Sigma m_A\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_B\ (F_i) = 0$（A、B 连线不垂直 x 轴） 或 $\Sigma m_A\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_B\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_C\ (F_i) = 0$（A、B、C 三点不共线）	3
空间力系	力偶系	$\Sigma m_x = 0$，$\Sigma m_y = 0$，$\Sigma m_z = 0$	3
	汇交力系	$\Sigma X_i = 0$，$\Sigma Y_i = 0$，$\Sigma Z_i = 0$，	3
	平行力系	$\Sigma Z_i = 0$，$\Sigma m_x\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_y\ (F_i) = 0$	3
	任意力系	$\Sigma X_i = 0$，$\Sigma Y_i = 0$，$\Sigma Z_i = 0$ $\Sigma m_x\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_y\ (F_i) = 0$，$\Sigma m_z\ (F_i) = 0$	6

对空间力系，亦可用力矩方程代替投影方程，但独立方程总数不变。

平面汇交力系的平衡亦可用几何法表示，即力多边形自行封闭。

3. 滑动摩擦，摩擦角和自锁

(1) 滑动摩擦力

分表5-3中三种情况

表5-3

	静滑动摩擦力 F	最大静滑动摩擦力 F_m	动滑动摩擦力 F'
方向	与滑动趋势相反	与滑动趋势相反	与两物体间相对速度方向相反
大小	$0 \leqslant F \leqslant F_m$	$F_m = fN$ f——静滑动摩擦系数。 N——接触处的法向反力的大小。	$F' = f'N$ f'——动滑动摩擦系数。

对于平衡问题，当 $F = F_m$ 时，求得的未知量是个确定值，当 $0 \leqslant F \leqslant F_m$ 时，求得的未知量是个范围值。

(2) 摩擦角 φ_m

摩擦角的正切 $$\mathrm{tg}\varphi_m = \frac{F_m}{N} = f$$

(3) 自锁

自锁条件：$\alpha \leqslant \varphi_m$ 与 p 大小无关

α——主动力的合力 p 与法向间的夹角

4. 重心

选列常用的重心计算公式于表5-4

表5-4

普遍公式	均质等厚薄壳的重心（形心）	普遍公式	均质等厚薄壳的重心（形心）	普遍公式	均质等厚薄壳的重心（形心）
$x_c = \frac{\Sigma w_i x_i}{W}$	$x_c = \frac{\Sigma x_i \Delta A_i}{A}$	$y_c = \frac{\Sigma w_i x_i}{W}$	$y_c = \frac{\Sigma x_i \Delta A_i}{A}$	$z_c = \frac{\Sigma w_i z_i}{W}$	$z_c = \frac{\Sigma x_i \Delta A_i}{A}$

表中，x_c、y_c、z_c 和 x_i、y_i、z_i——物体和其任一微小部分的重心坐标，

W (A) 和 w_i (ΔA_i) ——物体和其任一微小部分的重量（面积）。

(二) 运动学部分

1. 点的运动

表5-5中，r 和 x、y、z 分别为动点 M 的矢径和直角坐标，s 和 ρ 分别为动点 M 的弧坐标和轨迹在该点的曲率半径。

表5-5

	矢量法	直角坐标法	自然法
运动方程	$r = r(t)$	$r = xi + yj + zk$ $x = f_1(t)$ $y = f_2(t)$ $z = f_3(t)$	$s = f(t)$

	矢量法	直角坐标法	自然法
速度	$v=\frac{dr}{dt}=\dot{r}$	$v=v_x i+v_y j+v_z k$ $v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ $v_y=\frac{dx}{dt}=\dot{y}$ $v_z=\frac{dx}{dt}=\dot{z}$	$v=v\vec{\tau}$ $v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}$
加速度	$a=\frac{dv}{dt}=\ddot{r}$	$a=a_x i+a_y j+a_z k$ $a_x=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{x}$ $a_y=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{y}$ $a_z=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{z}$	$a=a_\tau \tau+a_n n+a_b b$ $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\ddot{s}$ $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ $a_b=0$

若 $a_\tau=$ 常量，则 $v=v_0+a_\tau \tau$ $s=s_0+v_0 t+\frac{1}{2}a_\tau t$ 或 $v^2-v_0^2=2a_\tau(s-s_0)$

2. 刚体的平动

特点：各点轨迹形状相同（可以是曲线或直线），每一瞬时各点具有相同的速度和加速度。

3. 刚体的定轴转动

(1) 转动刚体的计算公式

表 5-6

	变速转动	匀变速转动	匀速转动
转动方程	$\varphi=f(t)$	$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\varepsilon t^2$ 或 $\varphi=\varphi_0+\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)t$	$\varphi=\varphi_0+\omega t$
角速度	$\vec{\omega}=\omega k$ $\omega=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$	$\omega=\omega_0+\varepsilon t$ 或 $\omega^2=\omega_0^2+2\varepsilon(\varphi-\varphi_0)$	$\omega=$ 常数
角加速度	$\vec{\varepsilon}=\varepsilon k$ $\varepsilon=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d\omega}{dt}=\ddot{\varphi}=\omega\frac{d\omega}{d\varphi}$	$\varepsilon=$ 常数	$\varepsilon=0$

注：表中 φ_0 和 ω_0 分别为初瞬时的转角和角速度，k 为沿转轴 x 的单位矢量

4. 点的合成运动

表 5-7

	牵连运动为平动	牵连运动为转动
速度合成定理	$v_a=v_e+v_r$	
加速度合成定理	$a_a=a_e+a_r$	$a_a=a_e+a_r+a_k$ 科氏加速度 $a_k=2\vec{\omega}\times v_r$ $\vec{\omega}$——动系的角速度矢

注：表中，v_a、a_a 为动点在绝对运动中的速度、加速度；

v_r、a_r 为动点在相对运动中的速度、加速度；

v_e、a_e 为动点的牵连点的速度、加速度。

5. 刚体的平面运动

表 5-8

速度	合成法（基点法）	$v_M = V'_{O'} + v_{MO'}$ $\quad v_{MO'}\begin{cases}\text{大小：} v_{MO'} = O'M\cdot\omega \\ \text{方向：垂直 } O'M\text{，并顺着 } \omega \text{ 的转向指向前方}\end{cases}$
	投影法	$(v_M)_{O'M} = (v_{O'})_{O'M}$ O' 与 M 为图形上任意两个点
	瞬心法	$v_M = v_{MC}\begin{cases}\text{大小：} v_{MC} = CM\cdot\omega \\ \text{方向：垂直 } MC\text{，并顺着 } \omega \text{ 的转向指向前方}\end{cases}$ 条件 $v_C = 0$，C 点称为平面图形的速度瞬心
加速度合成法		$a_M = a_{O'} + a^{\tau}_{MO'} + a^{n}_{MO'}$ $\quad a^{n}_{MO}\begin{cases}\text{大小：} a^{n}_{MO} = O'M\cdot\varepsilon \\ \text{方向：垂直 } O'M\text{，指向顺着 } \varepsilon \text{ 的转向}\end{cases}$ $\quad a^{n}_{MO}\begin{cases}\text{大小：} a^{n}_{MO'} = O'M\cdot\omega^2 = \dfrac{v^2_{MO'}}{O'M} \\ \text{方向：沿着 } MO' \text{ 线，并指向 } O' \text{ 点}\end{cases}$

（三）动力学部分

1. 动力学基本定律与运动微分方程

根据质点动力学基本方程 $ma = \Sigma F_i$ 可得三种形式的质点运动微分方程。

表 5-9

矢量形式	直角坐标形式	自然坐标形式
$m\dfrac{d^2r}{dt^2} = F$	$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_i$ $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_i$ $m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_i$	$m\dfrac{d^2s}{dt^2} = \Sigma F_{i\tau}$ $m\dfrac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{in}$ $0 = \Sigma F_{ib}$

2. 动量定理

(1) 概念

1) 质心的矢径：

$$r_c = \frac{\Sigma m_i r_i}{M}$$

2) 质点的动量：

$$K = mv$$

3) 质点系的动量：

$$K = \Sigma m_i v_i = M v_c$$

式中 m_i——质点系中第 i 质点的质量；

$M = \Sigma m_i$——质点系的质量；

v_i——质点系中第 i 个质点的速度；

v_c——质点系质心 C 的速度。

4) 常力的冲量：$S = Ft$

5) 变力的冲量：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t$$

（2）动量定理　质心运动定理

表 5-10 中，$\Sigma F_i^e = R^e$ 为作用在质点系上的所有外力的矢量和，即外力系的主矢；$\Sigma S_i^e = S^e$ 为此外力系在时间（$t_2 - t_1$）内的冲量的矢量的和；K_2 和 K_1 分别为 t_1、t_2 时刻的动量；a_c 和 v_c 分别为质心的加速度和速度；脚标 x、y、z 和 τ、n、b 分别表示相应物理量在直角坐标轴和自然轴上的投影。

表 5-10

定理＼表达式		矢量形式	直角坐标形式	自然坐标形式
动量定理	微分形式	$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \Sigma F_i^e = R^e$	$\frac{\mathrm{d}K_x}{\mathrm{d}t} = \Sigma X_i^e$ $\frac{\mathrm{d}K_y}{\mathrm{d}t} = \Sigma Y_i^e$ $\frac{\mathrm{d}K_z}{\mathrm{d}t} = \Sigma Z_i^e$	
	积分形式	$K_2 - K_1 = \Sigma S_i^e = S^e$	$K_{2x} - K_{1x} = \Sigma S_{ix}^e$ $K_{2y} - K_{1y} = \Sigma S_{iy}^e$ $K_{2z} - K_{1z} = \Sigma S_{iz}^e$	
	守恒	$\Sigma F_i^e = 0$，K = 常矢量	$\Sigma F_i^e = 0$，K_x = 常数	
质心运动定理	一般表达式	$Ma_c = \Sigma F_i^e = R^e$ 或 $M\frac{\mathrm{d}^2 r_c}{\mathrm{d}t^2} = \Sigma F_i^e = Re$	$Ma_{cx} = R_x^e$ $Ma_{cy} = R_y^e$ $Ma_{cz} = R_z^e$	$Ma_{c\tau} = R_\tau^e$ $Ma_{cn} = R_n^e$ $0 = R_b^e$
	守恒	$R^e = 0$，$a_c = 0$，v_c = 常矢量	$R_x^e = 0$，$a_{cx} = 0$ v_{cx} = 常数	

3. 动量矩定理

（1）动量矩

1）质点对固定点 O 的动量矩

$$H_0 = m_0(mv) = r \times mv$$

式中，r 为质点对定点 O 的矢径。动量矩矢量是定位矢，应画在 O 点。其单位是 $\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ 或 $\mathrm{N \cdot m \cdot s}$。

2）质点系对固定点 O 的动量矩

$$H_0 = \Sigma m_0(m_i v_i)$$

3）质点系对过定点 O 的正交坐标系各轴的动量矩

$$H_x = \Sigma m_x(m_i v_i)$$

$$H_y = \Sigma m_y(m_i v_i)$$

$$H_z = \Sigma m_z(m_i v_i)$$

4）定轴转动刚体对转轴 z 的动量矩

$$H_z = J_z\omega$$

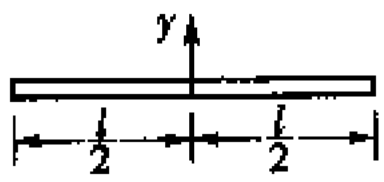
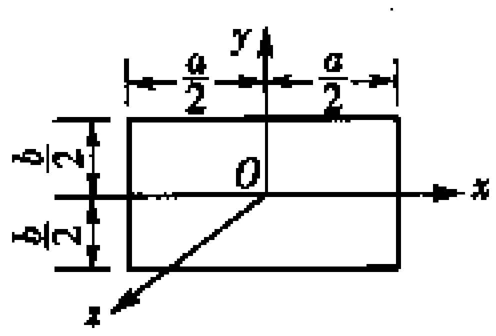
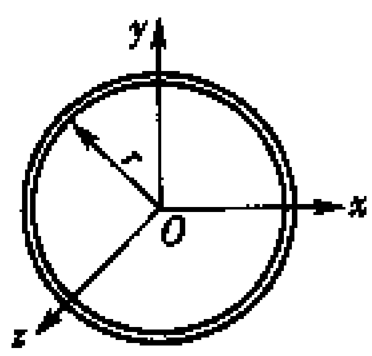
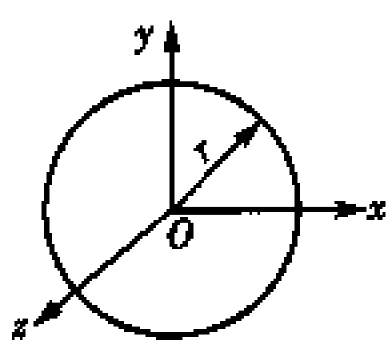
（2）转动惯量及其平行轴定理

1）转动惯量

表 5-11

转动惯量	表达式	说明
对任一 z 轴	$J_z=\Sigma m_i r_i^2$ 或 $J_z=M\rho_z^2$	r_i 是 i 质点到 z 轴之距 ρ_z 为回转半径

若干均质物质的转动惯量及回转半径　　表 5-12

物理形状	简图	转动惯量	回转半径
细杆		$J_y=\frac{1}{12}ml^2$	$\frac{1}{\sqrt{12}}l$
矩形薄板		$J_x=\frac{1}{12}mb^2$ $J_y=\frac{1}{12}ma^2$ $J_z=\frac{1}{12}m\ (a^2+b^2)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}b$ $\frac{1}{\sqrt{12}}a$ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$
细圆环		$J_x=J_y=\frac{1}{2}mr^2$ $J_z=mr^2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}r$
薄圆板		$J_x=J_y=\frac{1}{4}mr^2$ $J_z=\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{2}r$ $\frac{1}{\sqrt{2}}r$

2）转动惯量的平行轴定理

$$J_{z'} = J_z + Md^2$$

式中　z 轴通过质心 C 且与 z' 轴平行；d 为 z' 与 z 轴之间的距离。

（3）动量矩定理

质点系动量矩定理的表达式随矩心不同而有所改变，具体列于表 5-13。

表 5-13

矩心或矩轴	矢量形式	投影形式
定点 O	$\frac{dH_O}{dt}=\Sigma m_O(F_i^e)=M_O^e$	$\frac{dH_x}{dt}=\Sigma m_x(F_i^e)$ $\frac{dH_y}{dt}=\Sigma m_y(F_i^e)$ $\frac{dH_z}{dt}=\Sigma m_z(F_i^e)$
	若 $M_O^e=0$ 则 H_O = 常矢量 $\}$ 称动量矩守恒定理	若 $\Sigma m_x(F_i^e)=0$ 则 H_x = 常量
质心 C	$\frac{dH_C}{dt}=M_C^e$	略
转轴 z		$J_z\varepsilon=M_z^e$ 或 $J_z\ddot{\varphi}=M_z^e$ 称刚体定轴转动微分方程

(4) 刚体平面运动微分方程

$$M\ddot{x}_c=\Sigma X_i$$

$$M\ddot{y}_c=\Sigma Y_i$$

$$J_c\ddot{\varphi}=\Sigma m_c(F_i)$$

4. 动能定理

(1) 力的功

力的功是力在一段路程中对物体作用的累积效应。

表 5-14

物理量	表达式
元功	$d'w=F\cdot dr=F_t ds$
变力在路程 $\widehat{M_1M_2}$ 中的功	$w=\int_{M_1}^{M_2}F\cdot dr=\int_{s_1}^{s_2}F_t\cdot ds$ 或 $w=\int_{M_1}^{M_2}(Xdx+Ydy+Zdz)$
合力功	$w=\Sigma wi$

(2) 动能

动能是物体由于速度而具有的能量，它是物体机械运动的一种量度。动能恒为正值。单位与功相同。动能的具体表达式如表 5-16。

表 5-15

常见力	功的表达式	说　明
重　力	$w=\pm\frac{1}{2}mgh$ 重心由高→低取 + 低→高取 −	h：重心始末位置的高度差
弹性力	$w=+\frac{1}{2}k\ (\delta_1^2-\delta_2^2)$	k：弹簧的刚性系数 δ_1、δ_2 弹簧的始末变形
力　矩	$w=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_z\mathrm{d}\varphi$	
力　偶	$w=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}m\mathrm{d}\varphi$	

表 5-16

对　　象	动能表达式	说　　明
质　　点	$T=\frac{1}{2}mv^2$	
质　　点	$T=\Sigma\frac{1}{2}m_iv_i^2$	
平动刚体	$T=\frac{1}{2}Mv_c^2$	
定轴转动刚体	$T=\frac{1}{2}J_z\omega^2$	
平面运动刚体	$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}J_z\omega^2$	左式中 J_c 为刚体对于通过质心且垂直于运动平面的轴的转动惯量。

（3）势能

质点或质点系在势力场中从某一位置运动到零位置时，有势力的功称为质点或质点系在该位置的势能。在不同势力场中势能的表达式如表 5-17。

表 5-17

势　力　场	势　　能	零势能位置
重力场	$V=W\ (z_c-z_{c0})$	质心坐标为 z_{c0}
弹性力场	$V=\frac{k}{2}\ (\delta^2-\delta_0^2)$	弹簧变形为 δ_0
万有引力场	$V=Gm_0m\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)$	质点矢径为 r_0

（4）动能定理·机械能守恒定律

表 5-18

表达式形式 / 定　理	微　分　形　式	积　分　形　式
质点动能定理	$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=d'w$	$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=w$
质点系动能定理 机械能守恒定律	$dT=\Sigma d'w_i^e+\Sigma d'w_i^i$ 或 $dT=\Sigma d'w_i^A+\Sigma d'w_i^N$	$T_2-T_1=\Sigma w_i^e+\Sigma w_i^i$ 或 $T_2-T_1=\Sigma w_i^A+\Sigma w_i^N$ $T+V=$ 常量

表 5-18 中，上角标 e 与 i 分别表示外力与内力之功，一般内力的功不等于零；上角标 A 与 N 分别表示主动力与约束力之功，如果约束是理想的，即 $\Sigma w_i^N=0$，所以对于理想约束系统，在运用动能定理解题时，主要是分析主动力。

6. 达朗伯原理

(1) 惯性力

惯性力的表达式为 $F^{I}=-ma$

(2) 达朗伯原理

在非自由质点 M 运动中的每一瞬时，作用于质点的主动力 F、约束反力 N 和该质点的惯性力 F^{I} 构成一假想的平衡力系。这就是质点达朗伯原理，其表达式为

$$F+N+F^{I}=0$$

在非自由质点系运动中的每一瞬时，作用于质点系内每一质点的主动力 F_i、约束反力 N_i 和该质点的惯性力 $\vec{F}_i^{I}$ 构成一假想的平衡力系。这就是质点系达朗伯原理。即

$$F_i+N_i+F_i^{I}=0(i=1,2,\cdots,n)$$

(3) 惯性力系的简化

表 5-19

刚体运动形式	简化中心	惯性力系简化结果
平　动	质心 C	合力 $R^{I}=-Ma_c$
定轴转动 （具有垂直于转轴的质量对称平面）	转轴 O	惯性力 $R^{I}=-Ma_c=-M(a_{ct}+a_{cn})$ 惯性力偶 $M_0^{I}=-J_0\varepsilon$
	质心 C	惯性力 $R^{I}=-Ma_c=-M(a_{ct}+a_{cn})$ 惯性力偶 $M_c^{I}=-J_c\varepsilon$
平面运动 具有与平面图形平行的质量对称平面）	质心 C	惯性力 $R^{I}=-Ma_c$ 惯性力偶 $M_c^{I}=-J_c\varepsilon$

7. 虚位移原理

基本公式

表 5-20

内　容	表　达　式
虚位移原理	矢量形式 $\Sigma F_i\cdot\delta r_i=0$ 直角坐标形式 $\Sigma(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)=0$ 广义坐标形式 $\Sigma Q_j\delta q_j=0$
广　义　力	解析法 $Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)(j=1,2,\cdots,k)$ 虚元功法 $Q_j=\frac{\Sigma\delta w_F^{(j)}}{\delta q_j}(j=1,2,\cdots k)$ 势能偏导法（对保守系统） $Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}(j=1,2,\cdots k)$

表 5-20 中，F_i 及 X_i、Y_i、Z_i 为主动力及其投影；δr、δq 表示虚位移与广义虚位移；Q_j 为对应于广义坐标 q_j 的广义力。

8. 单自由度系统的振动

(1) 自由振动

1) 振动方程·振动特性

现取系统平衡位置为坐标原点 O，建立坐标轴 x，则以 x 为独立参数的振体自由振动的运动微分方程、振动方程、特性参数等列下表 5-21。

表 5-21

	自由振动		自由振动
运动微分方程	$\ddot{x} + px = 0$	周　期	$T = \frac{2\pi}{p}$
振动方程	$x = A\sin(pt + \alpha)$	频　率	$f = \frac{1}{T}$
积分常数	振幅　$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{p^2}}$	圆频率	$p = 2\pi f$
	初位相　$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{px_0}{v_0}$		

表 5-21 中 P、f、T 仅与系统的惯性和弹性有关，通常称 p、f 为固有圆频率、固有频率，自由振动的振幅 A、初位相 α 与系统的初始条件有关。

2) 并联和串联弹簧的当量刚性系数（或等效刚度）

并联：$k = k_1 + k_2 + \cdots k_n = \Sigma k_i$

串联：$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = \Sigma\frac{1}{k_i}$

(2) 强迫振动

由于扰力引起的振动，称为强迫振动。若干扰力随时间而简谐变化，则称为谐扰力，其可表示为 $S = H\sin\omega t$。

现以系统的平衡位置为坐标原点，以坐标 x 为独立参数，将受谐扰力作用下的强迫振动的主要内容列于表 5-22。

表 5-22

		$n = 0$	$n < p$
运动微分方程		$\ddot{x} + px = h\sin\omega t$	$\ddot{x} + 2n\dot{x} + px^2 = hs\sin\omega t$
振动方程		(a) $\omega \neq p$ $x = x_1 + x_2$ $= A\sin(pt + \alpha) + B\sin\omega t$ （自由振动）（强迫振动） (b) $\omega = p$ $x_2 = \frac{B_0}{2}pt\sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right)$ （共振方程）	$x = x_1 + x_2$ $= Ae^{-nt}\sin(\sqrt{p^2 - n^2}t + \alpha)$ $+ B\sin(\omega t - \varepsilon)$ x_1：衰减振动 x_1：强迫振动
强迫振动	振　幅	$B = \frac{h}{p^2 - \omega^2}$	$B = \frac{h}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}$
	频　率	ω	ω
	位相差	$\omega/p_1 < 1,\ = 1,\ > 1$ $\varepsilon: 0,\ \pi/2,\ \pi$	$\varepsilon = \mathrm{argtg}\frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}$
放大系数		$\lambda = \left\lvert\frac{B}{B_0}\right\rvert = \left\lvert\frac{1}{1 - z^2}\right\rvert$	$\lambda_n = \frac{B}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4\gamma^2 z^2}}$

表 5-22 中 $B_0=\frac{h}{p^2}$，它表示系统在干扰力的最大幅值 H 静止作用下所产生的偏移；$z=\frac{\omega}{p}$称为频率比；$\gamma=\frac{n}{p}$称为阻尼比。

六、材料力学

(一) 轴向拉伸和压缩

1. 横截面上应力

$$\sigma=\frac{N}{A}$$

式中 N = 轴力，A = 横截面面积。

2. 斜截面应力

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha=\left(\frac{\sigma}{2}\right)\sin2\alpha$$

式中 α = 斜截面法线与轴线夹角

(3) 虎克定律 $\Delta L=\frac{NL}{EA}$

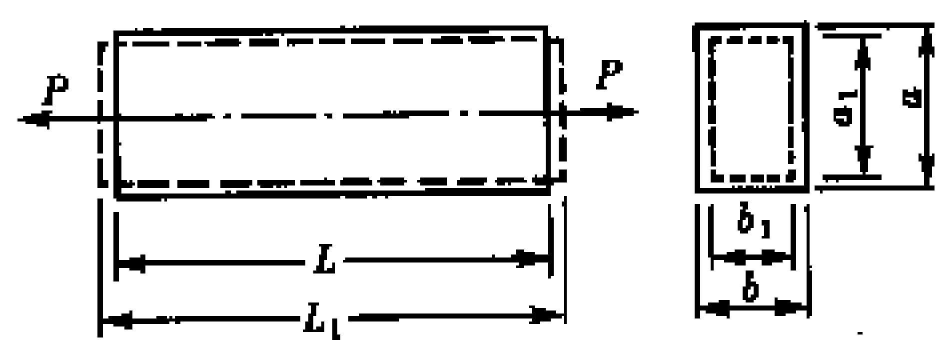


图 6-1

式中 $\Delta L=L_1-L$ = 杆件伸长

E = 弹性模量，EA = 抗拉刚度。

(4) 纵向线应变 $\epsilon=\frac{\Delta L}{L}$

(5) 横向线应变 $\epsilon'=\frac{v_i-b}{b}=-\nu\epsilon$

式中 ν = 泊松比

6. 单轴虎克定律 $\sigma=E\epsilon$

7. 应变能 $U=\frac{N^2L}{2EA}$

比能 $u=\frac{1}{2}\sigma\epsilon$

(二) 剪切与连接计算

1. 剪切的实用计算 $\tau=\frac{Q}{A}\leqslant[\tau]$

2. 挤压的实用计算 $\sigma_{bs}=\frac{P_{bs}}{A_{bs}}\leqslant[\sigma_{bs}]$

3. 剪切虎克定律 $\tau=G\gamma$

式中 γ = 剪应变；G = 剪变模量；对各向同性材料；有

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

(三) 圆轴扭转

1. 外力偶矩 $m=9549\frac{P}{n}(\mathrm{Nm})$

式中 P = 轴所转递功率；千瓦数，n = 轴转速，转/分。

2. 横截面上剪应力 $$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$$

式中 T = 扭矩；ρ = 所算点与圆心距离；I_p = 极惯性矩；对实心轴，有

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

对空心轴，有 $$I_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - \alpha^4)$$

式中 d = 内直径；D = 外直径；$\alpha = d/D$。

3. 强度条件 $$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} \leqslant [\tau]$$

式中 实心圆轴，有 $$W_t = \frac{\pi d^3}{16}$$

空心圆轴，有 $$W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$$

4. 扭转角 $$\Phi = \frac{TL}{GI_p}$$

5. 刚度条件 $$\varphi = \frac{\Phi}{L} = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leqslant [\varphi]$$

6. 应变能 $$U = \frac{T^2 L}{2GI_p}$$

（四）截面的几何性质

1. 静矩 $$S_z = \int_A y\mathrm{d}A, S_y = \int_A z\mathrm{d}A$$

2. 形心坐标 $$\bar{y} = \frac{S_z}{A}, \bar{z} = \frac{S_y}{A}$$

3. 轴惯性矩 $$I_z = \int_A y^2\mathrm{d}A = i_z^2 A, I_y = \int_A z^2\mathrm{d}A = i_y^2 A$$

式中 i_z、i_y 为惯性半径。

4. 对于 $b \times h$ 矩形截面

z 轴与边长为 b 的边平行且通过形心，有

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

y 轴与边长为 h 的边平行且通过形心，则有

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

5. 对于实心圆截面有 $$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

对于空心圆截面，有 $$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$$

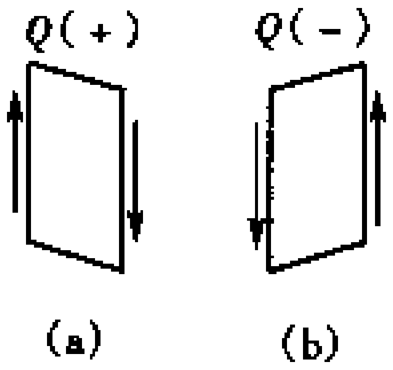


图 6-2

6. 平行移轴公式 $$I_z = I_{zc} + a^2 A$$

式中 I_{zc} = 截面对形心轴惯性矩；$a = z_c$ 与 z 两平行轴间距离。

（五）弯曲

1. 弯曲内力符号规定

产生左端向上，右端向下错动的剪力为正如图 6-2（a），反之，如图

6-2（b）为负。使底部纤维外凸（拉伸）的弯矩为正（图 6-3a），反之（图 6-3（b））为负。

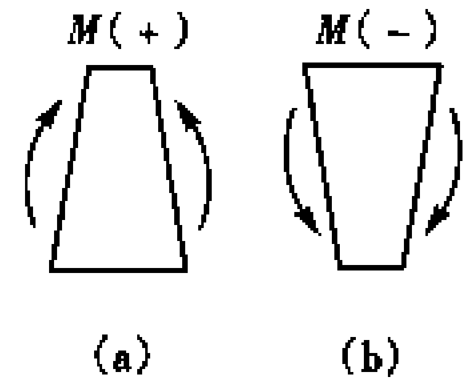


图 6-3

2. q、Q 与 M 的微分关系

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}=q,\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=Q,\frac{d^2M}{\mathrm{d}x^2}=q,$$

q 为荷载集度，向上为正。

3. 弯曲正应力 $\sigma=\dfrac{My}{I_z}$

4. 强度条件 $\sigma_{\max}=\dfrac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$

$b\times h$ 矩形截面 $W_z=\dfrac{bh^2}{6}$

空心圆截面 $W_z=\dfrac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$

5. 弯曲剪应力 $\tau=\dfrac{QS_z^*}{I_zb}$

式中 $S_z^*=A^*\cdot\vec{y}$，A^* = 计算点横线以外部分截面面积。

$\vec{y}=A^*$ 部分截面形心到中性轴的距离，b = 计算点处截面宽度。

对于矩形截面，有 $\tau_{\max}=1.5\dfrac{Q}{A}$

6. 弯曲变形

（1）挠曲线微分方程 $EIv''=-M(x)$

积分一次得转角方程，再积一次得挠曲线方程，积分常数由边界条件确定。

（2）几种梁的变形见图 6-4、6-5。

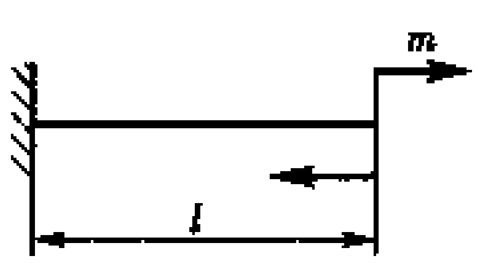
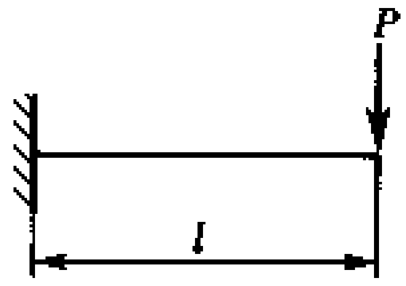
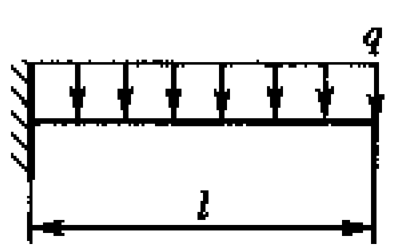
悬臂梁	最大转角	最大挠度
	$\dfrac{mL}{EI}$	$\dfrac{mL^2}{2EI}$
	$\dfrac{PL^2}{2EI}$	$\dfrac{PL^3}{3EI}$
	$\dfrac{qL^3}{6EI}$	$\dfrac{qL^4}{8EI}$

图 6-4

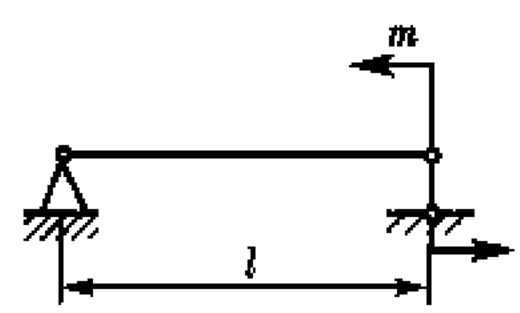
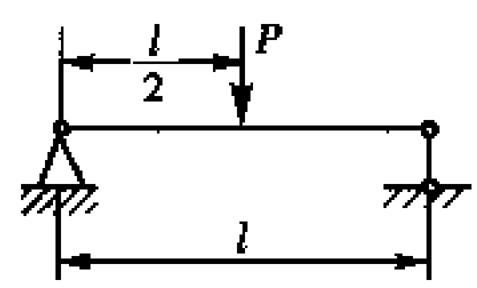
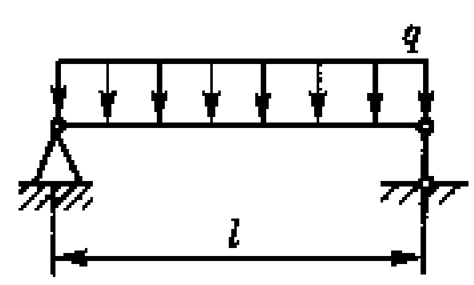
简支梁	最大转角	跨中点挠度
	$\dfrac{mL}{6EI}$(左端) $\dfrac{mL}{3EI}$(右端)	$\dfrac{mL^2}{16EI}$
	$\dfrac{PL^2}{16EI}$	$\dfrac{PL^3}{48EI}$
	$\dfrac{qL^3}{24EI}$	$\dfrac{5qL^4}{384EI}$

图 6-5

（3）卡氏定理 $\Delta=\dfrac{\partial U}{\partial P}$

式中　Δ = 欲求的广义位移，可为挠度或转角等。

P = 与 Δ 相应的广义力，可为力或力偶矩。

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_L \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial P}\mathrm{d}x = \int_L \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

式中：$\dfrac{\partial M(x)}{\partial P} = \overline{M}(x)$ = 梁上只有与 Δ 相应的单位力或单位力偶矩作用引起的弯矩。

（六）应力分析及强度理论

1. 任意斜截面（图 6-6（a））上的应力

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha$$

2. 应力圆如图（6-6（b））

在应力圆上可确定 σ_a、τ_a、主应力及主平面角度。

3. 主应力及主方向（图 6-6（c））

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = \frac{-2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$$

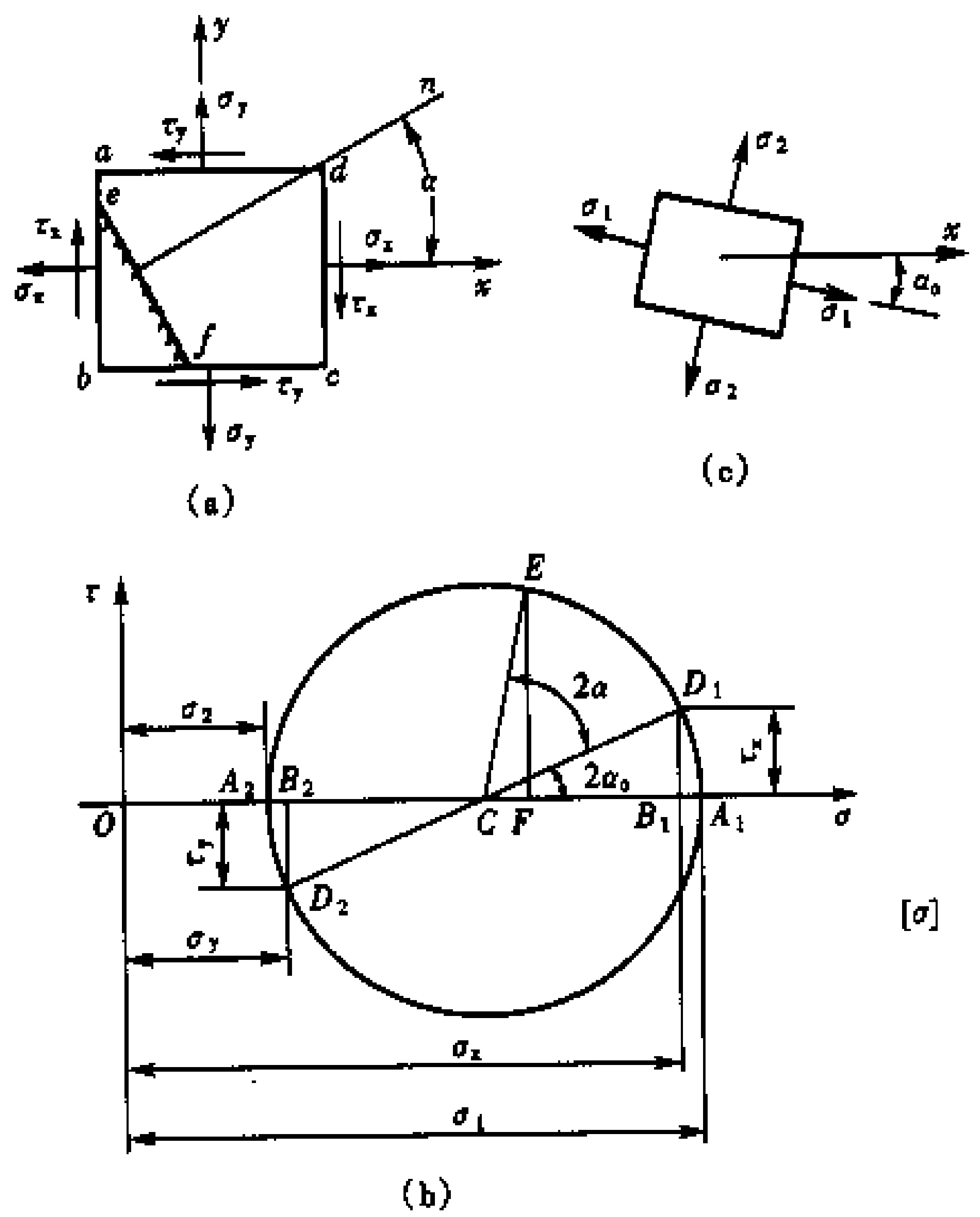


图 6-6

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

在平面应力状态，另有一个主应力为 0，应使 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$（按代数值），若公式算出的二个主应力值中一正一负，则负的一个作 σ_3；若公式算出的二个主应力皆负，则分别作为 σ_2，σ_3。

4. 最大剪应力　　$\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

5. 广义虎克定律

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]\end{aligned}\right\}$$

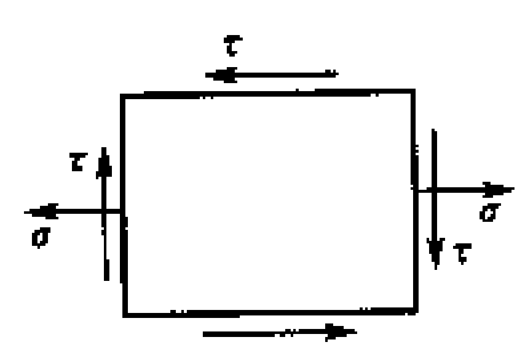


图 6-7

6. 四个常用强度理论

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leqslant [\sigma]$$

对于图 6-7 所示应力状态，有

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

（七）组合变形

1. 对于互相垂直两个平面弯曲的组合

矩形截面： $$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leqslant [\sigma]$$

圆截面： $$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W} \leqslant [\sigma]$$

2. 拉、压与弯曲的组合

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leqslant [\sigma]$$

3. 扭转与弯曲的组合（圆截面）

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leqslant [\sigma]$$

（八）压杆稳定

1. 细长压杆 $\left(\lambda \geqslant \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}\right)$

临界力公式见表 6-1

临界应力 $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

式中 $\lambda = \frac{\mu L}{i}$ = 柔度（或长细比）。

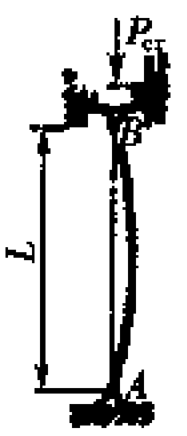
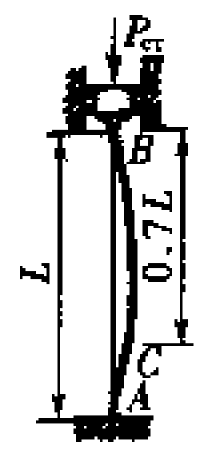
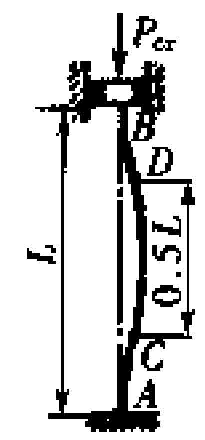
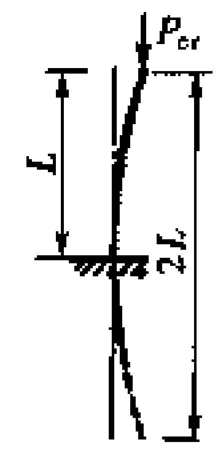
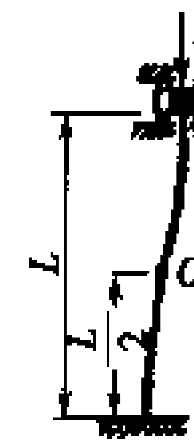
2. 中等柔度压杆（$\lambda < \lambda_p$）

常用直线公式 $$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

3. 折减系数法 $$\sigma = \frac{P}{A} \leqslant \varphi[\sigma]$$

式中 φ 为折减系数，可根据 λ 查图表确定（表 6-1）。

各种约束条件下细长压杆的临界力公式　　表 6-1

支端情况	两端铰支	一端固定另端铰支	两端固定	一端固定另端自由	两端固定但可沿横向相对移动
失稳时挠曲线形状		 C—挠曲线拐点	 C、D—挠曲线拐点		 C—挠曲线拐点
临界力 P_{cr} 欧拉公式	$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{cr}\approx\frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$	$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$	$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$	$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2}$
长度系数 μ	$\mu=1$	$\mu\approx 0.7$	$\mu=0.5$	$\mu=2$	$\mu=1$

七、流体力学

（一）流体的主要物理性质（表 7-1）

1. 密度

对于均质流体　　$\rho=m/V$

式中　ρ——密度，*SI* 单位 kg/m^3；

m——流体的质量；

V——体积。

2. 粘度

牛顿内摩擦定律

$$\tau=\mu\ (du/dy)$$

式中　τ——切应力；

du/dy——流速梯度，即流体微团的剪切变形速度；

μ——［动力］粘度（动力粘滞系数），*SI* 单位 Pa·S；

ν——运动粘度（运动粘滞系数），$\nu=\mu/\rho$，*SI* 单位 m^2/s。

3. 压缩系数

液体　　$k=-\frac{dV}{Vdp}$

式中　k——压缩系数，*SI* 单位 m^2/N；

(dV/V)——体积的相对压缩值；

dp——压强增值；

K——体积模量，$K=\frac{1}{k}$。

气体在通常压强范围内，密度随温度和压强的变化符合气体状态方程。

补充说明

[1] 水的密度随温度和压强变化很小，一般以 4℃时的密度 $\rho=1000kg/m^3$ 做为计算值。

[2] 水的 K 值可采用 2.1×10^9Pa，一般可以认为水是不可压缩的。

[3] 水银的密度一般可取 $\rho=13600kg/m^3$ 做为计算值。

（二）流体静力学

1. 重力作用下静水压强的分布规律

$$P = p_0 + \rho g h$$

$$z + \frac{P}{\rho g} = C$$

式中 P——某点压强；

p_0——表面压强；

z——某点在基准面以上的位置高度；

ρ——流体的密度；

g——重力加速度，一般计算取 $g=9.807m/s^2$。

常见流体的主要物理性质　　表 7-1

物性 / 流体	温度 ℃	ρ (kg/m^3)	μ ($10^{-3}Pa\cdot S$)	ν ($10^{-6}m^2/s$)	K (10^9Pa)	备注
水	0	999.9	1.78	1.785	2.02	
	5	1000.0	1.518	1.519	2.06	
	10	999.7	1.307	1.306	2.10	
	20	998.2	1.002	1.003	2.18	
煤油	20	814	1.900	2.30		
水银	0	13600				
	20	13550	1.50	0.12		
空气	0	1.29	0.0172	13.7		压强：1atm
	20	1.20	0.0183	15.7		

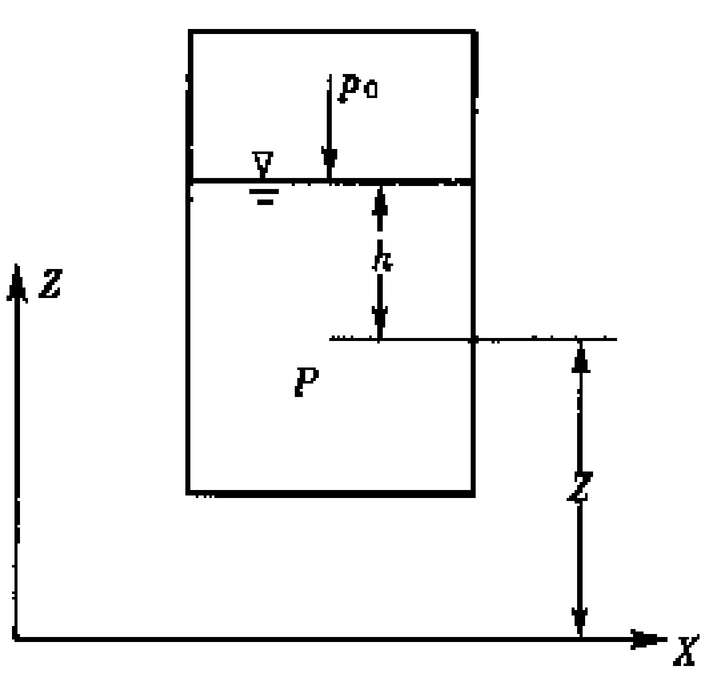


图 7-1

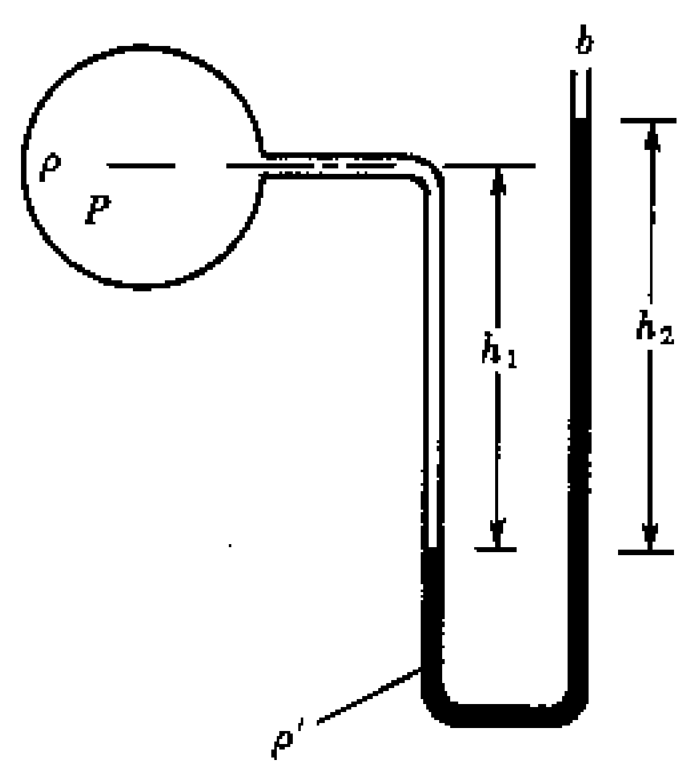


图 7-2

$$P = P_b + \rho' g h_2 - \rho g h_1$$

b 端通大气，P_b 为当地大气压 P_a，P 以绝对压强计：

$$P = P_a + \rho' g h_2 - \rho g h_1$$

P 以相对压强计：

$$P = P_a + \rho' g h_2 - \rho g h_1 - p_a = \rho' g h_2 - \rho g h_1$$

标准大气压　　　　　　　　1atm = 101325Pa

2. 平面上的静水总压力

$$P = p_c A$$

$$y_D = y_c + I_{xc}/(y_c A)$$

式中　P——静水总压力；

p_c——受压面形心 C 点压强；

A——受压面面积；

y_D——P 的作用点到 x 轴的距离；

y_c——受压面形心到 x 轴的距离；

I_{xc}——面积 A 对通过形心点并与 x 轴平行的轴的惯性矩。

3. 曲面上的静水总压力

水平分力　　　　　　　　$P_x = p_c A_x$

垂直分力　　　　　　　　$P_z = \rho g V$

总压力　　　　　　　　$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$

P 作用线与水平线夹角　　　　$\alpha = \mathrm{arctg}(P_z/P_x)$

式中　p_c——曲面垂直投影面形心点的压强；

A_x——曲面垂直投影面的面积；

V——压力体的体积。

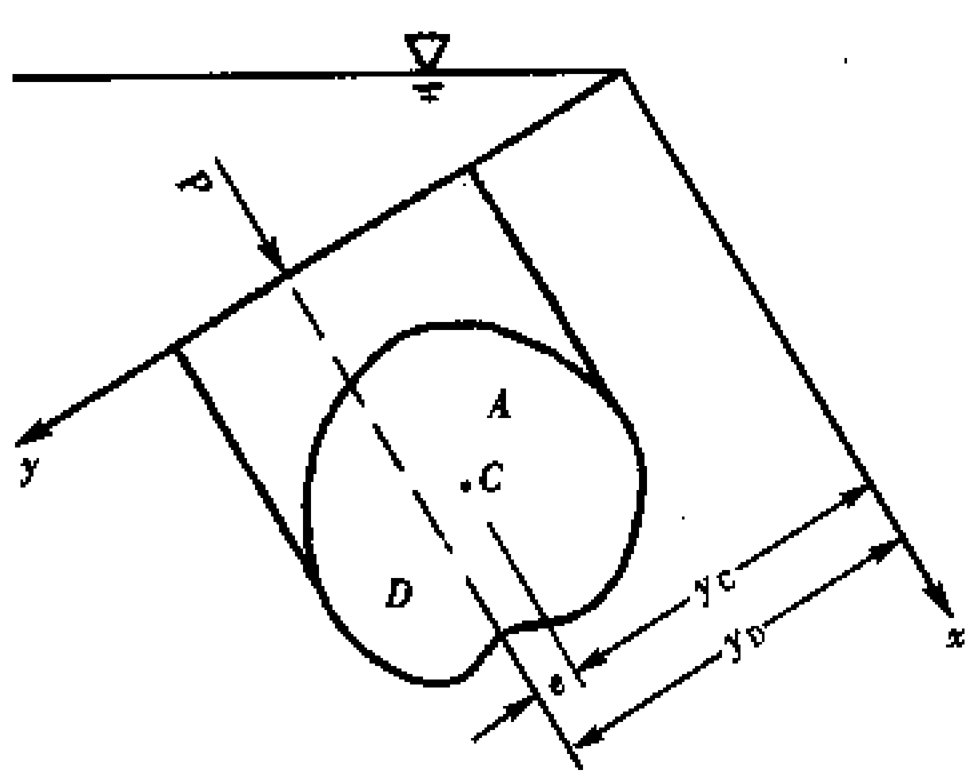


图 7-3

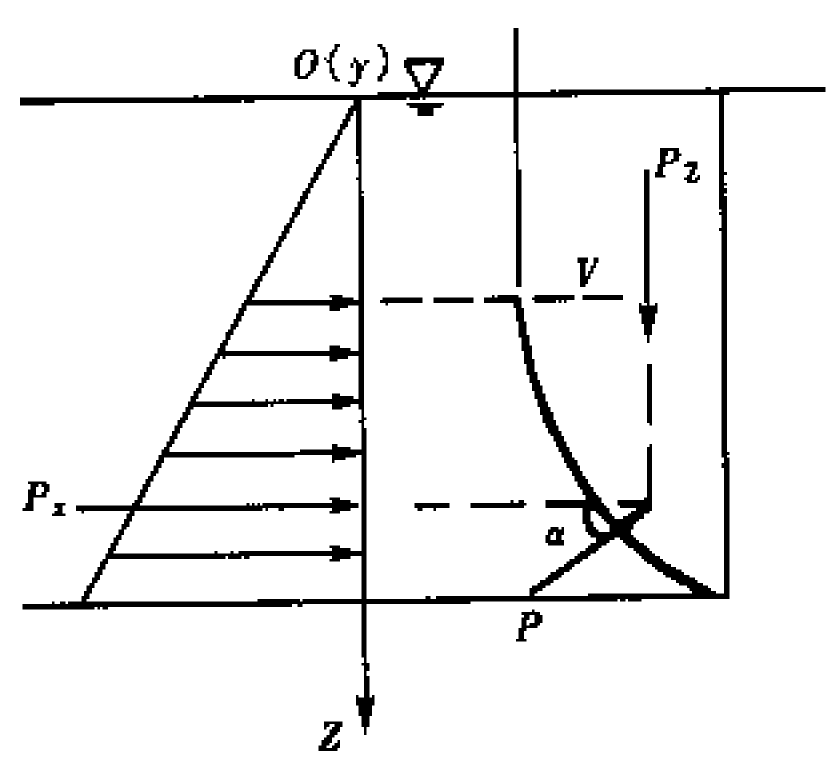


图 7-4

（三）流体动力学基础

1. 恒定总流连续性方程

$$v_1A_1 = v_2A_2$$

式中 v_1、v_2——过流断面（1，2）断面平均流速；

A_1、A_2——过流断面（1，2）面积。

2. 恒定总流能量方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

式中 z_1、z_2——过流断面（1，2）上计算点的位置高度；

p_1、p_2——过流断面（1，2）上计算点的压强；

v_1、v_2——过流断面（1，2）断面平均流速；

α_1、α_2——过流断面（1，2）动能修正系数；

h_w——总水头损失。

3. 恒定总流动量方程

$$\Sigma \overline{F} = \rho Q\ (\beta_2 \overline{v}_2 - \beta_1 \overline{v}_1)$$

式中 $\Sigma \overline{F}$——作用在控制体内流体上的合力；

ρ——流体密度；

Q——通过控制面的流量；

$\overline{v}_1$、$\overline{v}_2$——过流断面（1，2）上的平均速度矢量；

β_1、β_2——过流断面（1，2）动量修正系数。

（四）流动阻力和水头损失

1. 雷诺数

$$R_e = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$$

临界雷诺数

$$R_{ec} = \frac{v_c d}{\nu} = 2300$$

$$R_{ec,R} = \frac{v_c R}{\nu} = 575,\quad R\text{——水力半径}$$

$R_e < R_{ec}$：层流；$R_e > R_{ec}$：紊流

2. 沿程水头损失

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

沿程摩阻系数（阻力系数）：

圆管层流 $\lambda = 64/R_e$

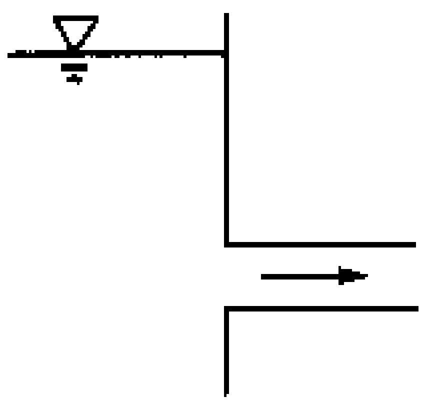
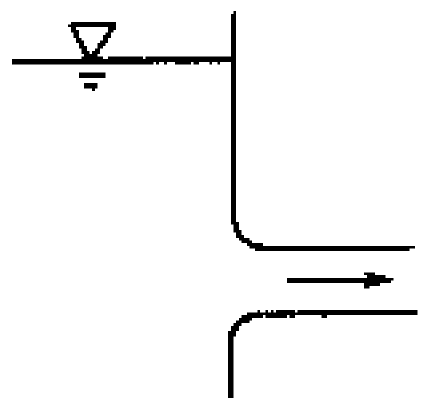
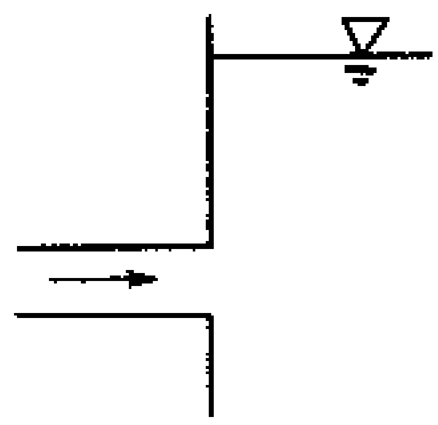
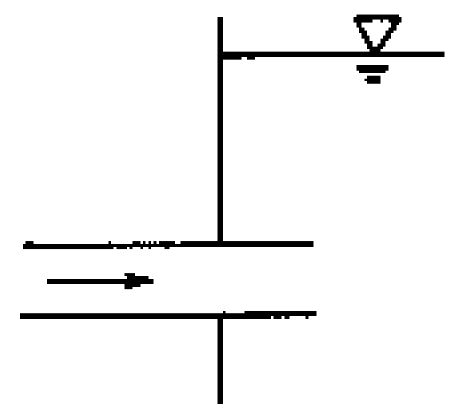
圆管紊流 $\lambda = f\ (R_e,\ K_e/d)$，见 Moody 图（图 7-8）

3. 局部水头损失

$$h_j = \xi \frac{v^2}{2g}$$

式中 ξ——局部损失系数。

管道进、出口局部损失系数　　**表 7-2**

类　别	直角进口	修圆进口	直角出口	插入出口
图　示				
ξ	0.5	0.1	1.0	0.8

圆管突然扩大局部水头损失

$$h_j = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$$

式中　v_1——细管断面平均流速；

v_2——粗管断面平均流速。

4. 绕流阻力

$$D = C_D \frac{\rho v_\infty^2}{2} A$$

式中　D——绕流阻力；

C_D——绕流阻力系数，其值取决于绕流体体型和 R_e，见图 C_D - R_e 曲线（图 7-9）；

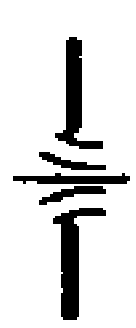
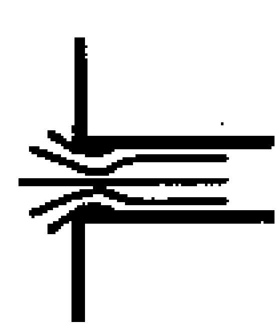
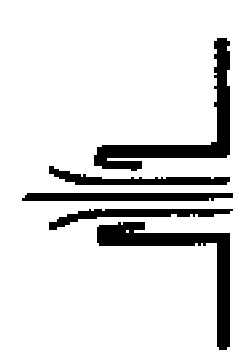
U_∞——未扰动的来流速度；

A——绕流物体的迎流面积。

（五）孔口、管嘴出流，有压管道恒定流

1. 孔口、管嘴出流

孔口、管嘴出流系数　　**表 7-3**

类　别	锐缘孔口	修圆孔口	圆柱形外管嘴	圆柱形内管嘴
图　示				
收缩系数 ε	0.64	1.00	1.00	0.52
流速系数 φ	0.97	0.98	0.82	0.98
流量系数 μ，μ_n	0.62	0.98	0.82	0.52

孔口出流 $Q=\mu A\sqrt{2gH}$

管嘴出流 $Q=\mu_n A\sqrt{2gH}$

式中 Q——流量；

A——孔口（管嘴）面积；

H——水头，自由出流情况，在上游水面通大气时，H 为水面至孔口（管嘴）形心的深度；淹没出流情况，在上、下游水面通大气时，H 为上、下游水面差。

μ、μ_z——流量系数。

2. 有压管道恒定流

短管
$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$
$$v_1A_1=v_2A_2$$

串联管道（长管），图 7-5。
$$H=\sum_{i=1}^{n}h_{fi}$$
$$Q_i=q_i+Q_{i+1}$$

式中 Q_i——管中流量；

q_i——节点出流量。

并联管道（长管），图 7-6。
$$\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}=\lambda_2\frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}$$
$$Q=Q_1+Q_2$$

3. 泵的功率
$$P=\rho gQH/\eta$$

式中 P——功率，(W)；

Q——流量，(m^3/S)；

H——扬程，m；

η——效率。

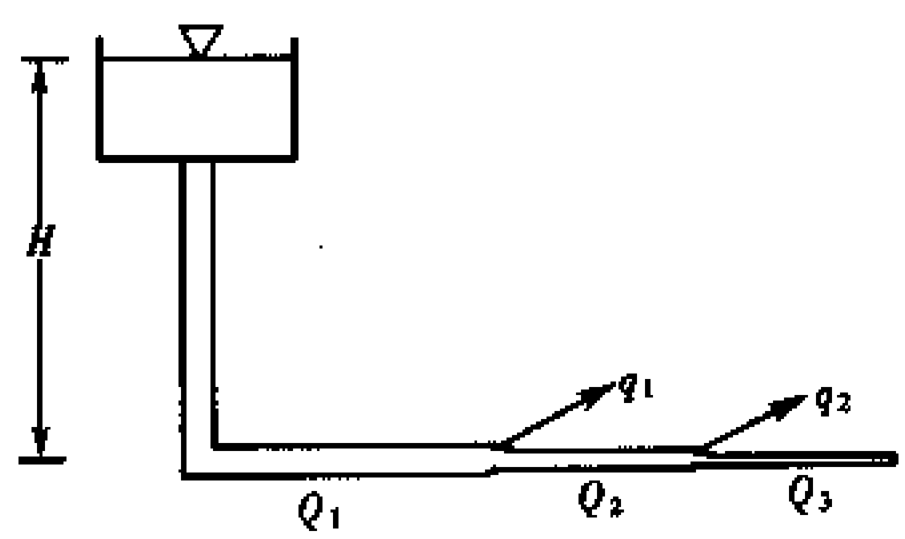


图 7-5

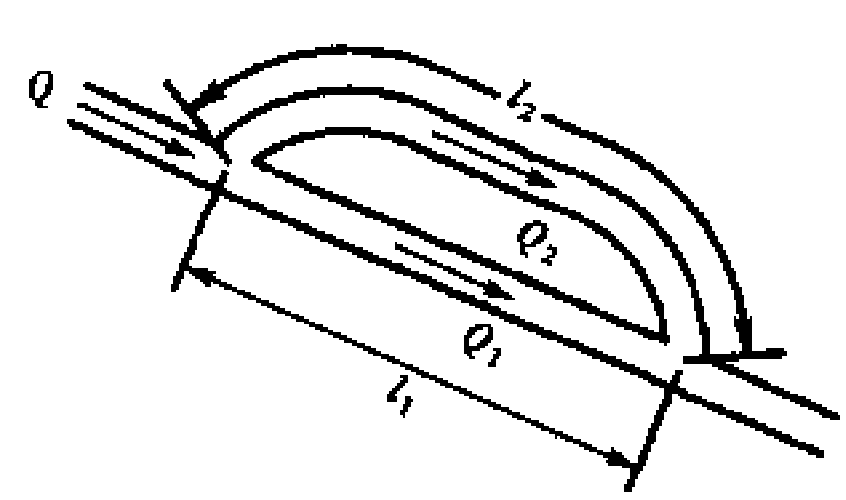


图 7-6

（六）明渠恒定均匀流

谢才（Chezy，A.de）公式：

$$Q = Av$$

$$v = C\sqrt{Ri}$$

式中 v——平均流速（m/s）；

C——谢才系数（$m^{1/2}/s$）；

i——渠道底坡；

R——水力半径（m）；

A——过水断面积。

曼宁（Manning，R）公式 $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$

式中 n——粗糙系数

（七）渗流

1. 达西（Darcy，H）定律

$$v = kJ$$

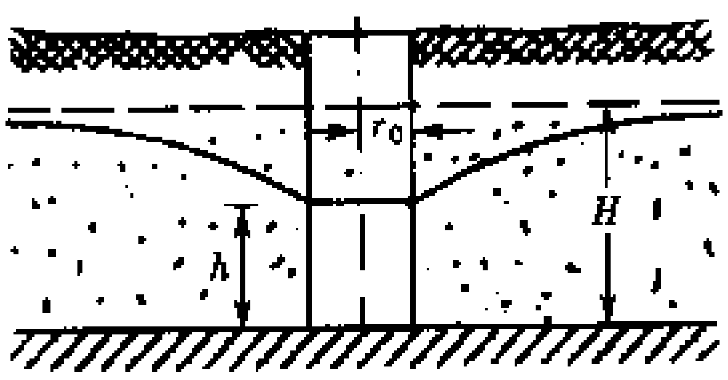


图 7-7

式中 v——渗流模型的断面平均流速；

k——土体渗透系数；

J——水力坡度。

2. 潜水完全井

$$Q = 1.366\frac{k(H^2 - h^2)}{\lg\frac{R}{r_0}}$$

式中 Q——井的产水量；

k——土体渗透系数；

H——含水层厚度；

h——井中水深；

r_0——井的半径；

R——影响半径。

（八）相似原理和量纲分析

1. 相似准则

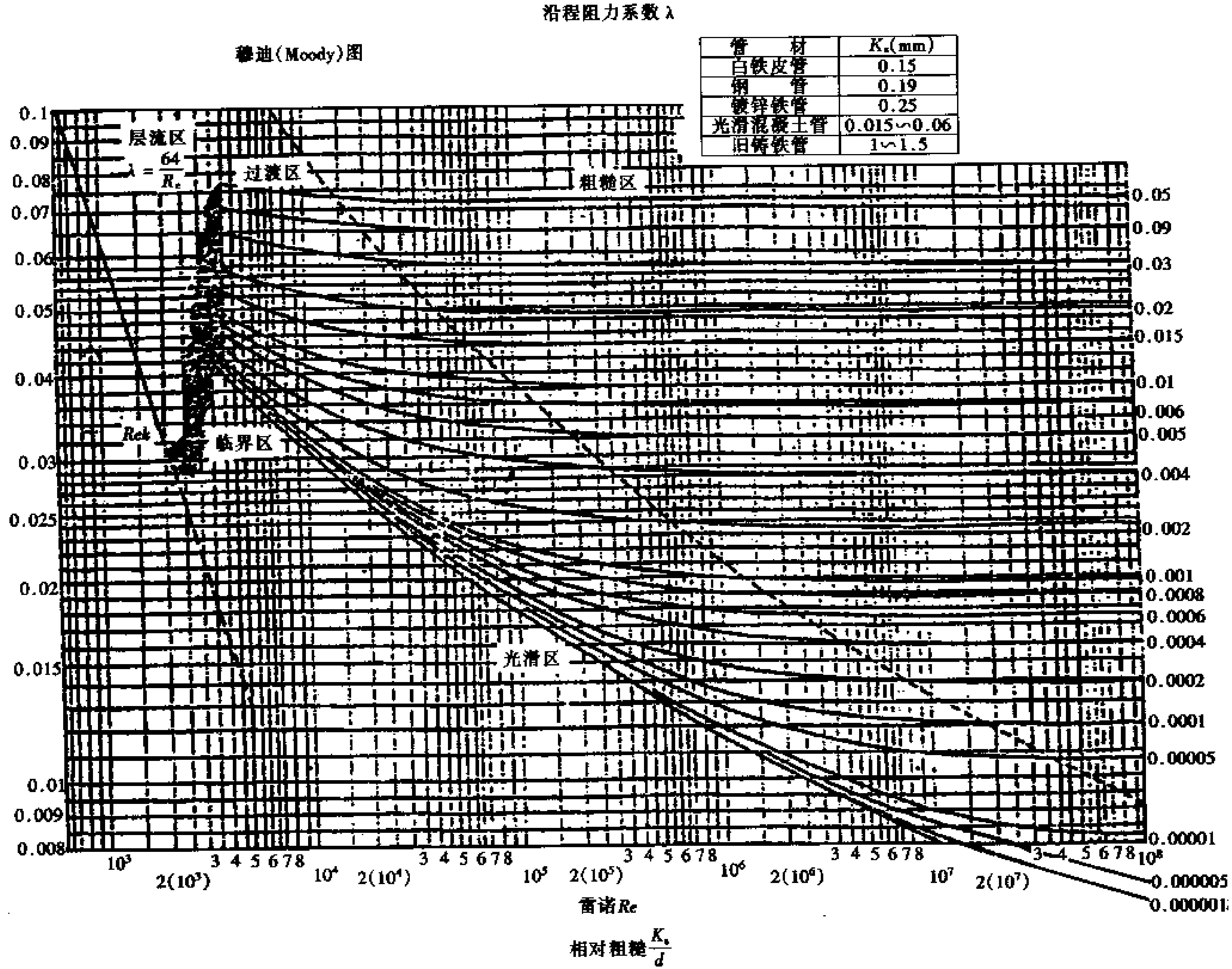
雷诺（Reynolds）准则 $Rep = Rem$：$\frac{v_p l_p}{\nu_p} = \frac{v_m l_m}{\nu_m}$

弗劳德（Froude）准则 $Frp = Frm$：$\frac{v_p}{\sqrt{g_p l_p}} = \frac{v_m}{\sqrt{g_m l_m}}$

欧拉（Euler）准则 $Eup = Eum$：$\frac{p_p}{\rho_p v_p^2} = \frac{p_m}{\rho_m v_m^2}$

2. 量纲分析法

Ⅱ定理：任何一个物理过程，如包含有 n 个物理量，涉及到 m 个基本量纲（通常采用 L.T.M），则这个物理过程可由 n 个物理量组成的（$n - m$）个无量纲量所表达的关系式来描述。



管　材	K_s(mm)
白铁皮管	0.15
钢　管	0.19
镀锌铁管	0.25
光滑混凝土管	0.015～0.06
旧铸铁管	1～1.5

图 7-8

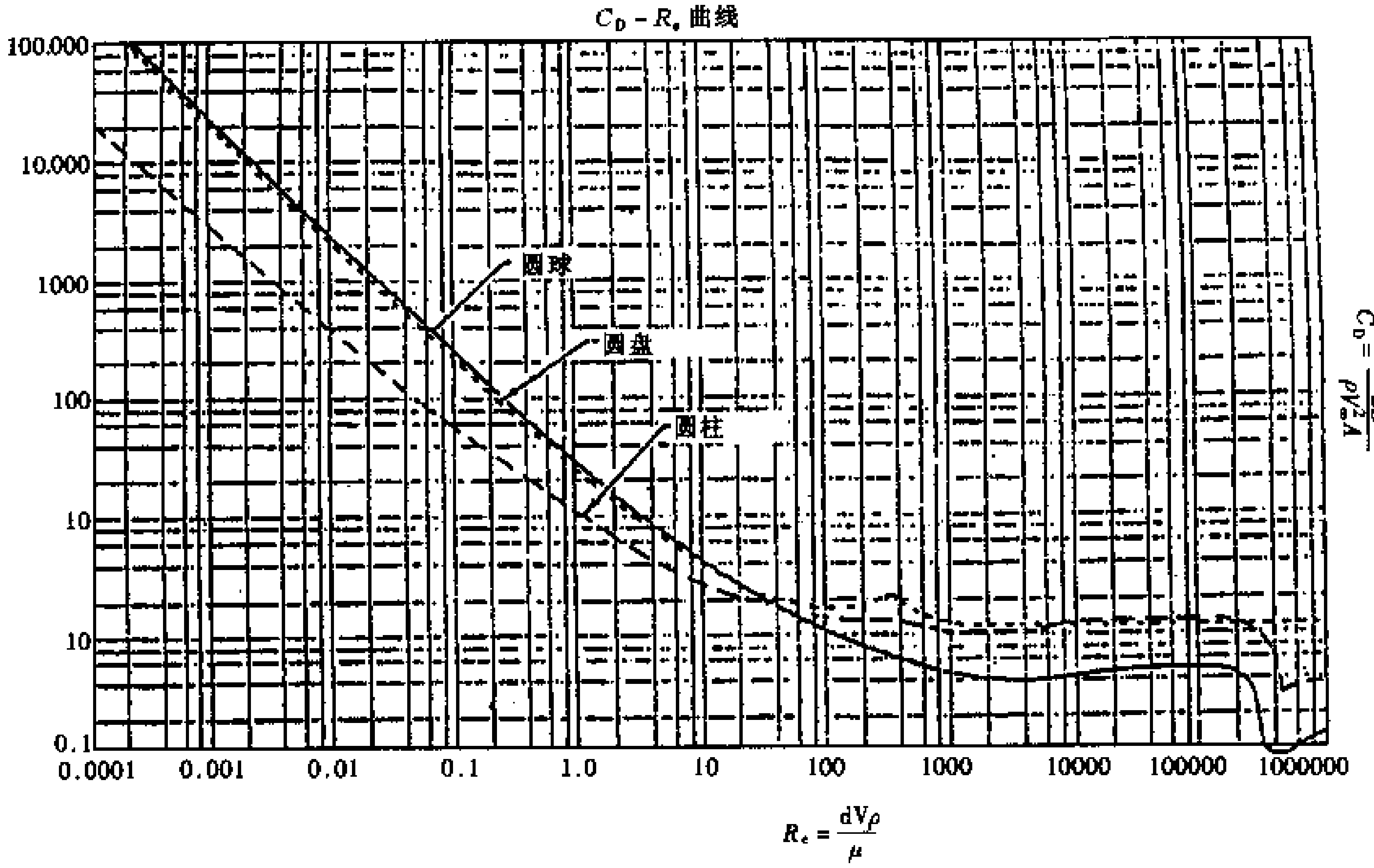


图 7-9

八、电工学

(一) 电场与磁场

1. 电场与磁场（见表 8-1）

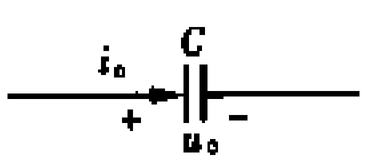
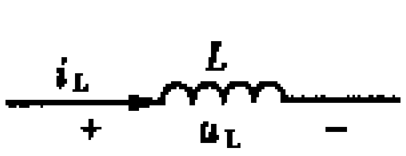
电场与磁场的基本定律及公式 **表 8-1**

名　称	公　式	说　明
库仑定律	$F_{21} = -F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^3}r_{12}$	F_{21}——点电荷 q_1 对点电荷 q_2 的作用力（N） F_{12}——点电荷 q_2 对点电荷 q_1 的作用力（N） r_{12}——点电荷 q_1 和点电荷 q_2 之间的距离（m） r_{12}——点电荷 q_1 指向点电荷 q_2 的矢径（m） ε_0——真空的介电常数，其值为 8.85×10^{-12}F/m
电场强度	$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}r$	E——点电荷 q 产生的电场强度（V/m） r——点电荷 q 至观察点的距离（m） r——点电荷 q 指向观察点的矢径（m）
电场力的功	$A_{ab} = \int_a^b F \cdot dl$	A_{ab}——电场力将电荷从 a 点移到 b 点所作的功（J） F——电场对电荷的作用力（N）

名　称	公　式	说　明
高斯定理	$\oint_A E \cdot \mathrm{d}A = \frac{\Sigma_q}{\varepsilon_0}$	E——电场强度（V/m） Σ_q——封闭曲面内各种电荷的代数和（C） ε_0——真空的介电常数（F/m）
磁场强度	$H = \frac{B}{\mu}$	H——磁场强度（A/m） B——磁通密度，又称磁感应强度（T） μ——磁介质的磁导率，在空气中 $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m
安培力（电磁力）	$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}l \times B$ 均匀磁场时 $F + BIl$	F——磁场对载流导线的作用力（N） I——导线载有的电流（A） l——载有电流的导线长（m）
安培环路定律	$\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \mu_0 \Sigma I$	B——磁感应强度（T） μ_0——真空导磁率（H/m） ΣI——闭合曲线内各电流的代数和（A）
电磁感应定律	$e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 当 Blv 三者方向互相垂直时 $e = Blv$	e——感生电动势（V） N——线圈匝数 $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$——磁通量对时间的变化率 v——直导线运动速度（m/s） l——直导线长（m）

2. 电容元件与电感元件（见表 8-2）

电容元件与电感元件的基本性能　　表 8-2

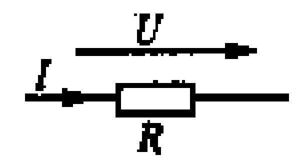
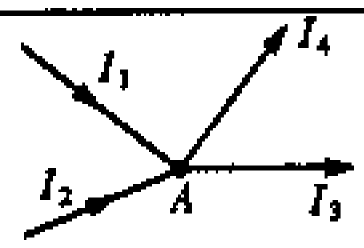
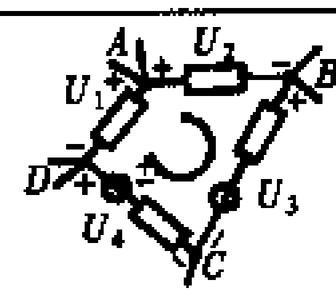
元件名称及符号	伏 安 关 系	储　能	说　明
 电容元件	$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(\tau)\mathrm{d}\tau$ $i_c(t) = C(\mathrm{d}u_c/\mathrm{d}t)$	$\frac{1}{2}Cu_c^2$ $= q_c^2/2C$ $= q_c \cdot u_c/2$	u_c（0）——$t=0$ 时电容电压（V） q_c——电容所带电量（C） C——电容（F）
 电感元件	$u_L(t) = L(\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t)$ $i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{2}Li_L^2$	i_L（0）——$t=0$ 时电感电流（A） L——自感（H）

（二）直流电路

1. 欧姆定律（见表 8-3）

2. 基尔霍夫定律（见表 8-3）

电路的基本定律 表 8-3

名称		电路图	公式	说明
欧姆定律			$U = IR$	R——电阻（Ω） U——电阻两端电压（V） I——流过电阻的电流（A）
基尔霍夫定律	KCL		$\Sigma I = 0$	ΣI——任一瞬间，任意节点上电流的代数和（A）
	KVL		$\Sigma U = 0$	ΣU——任一瞬间，任意回路内各部分电压降的代数和（V）

3. 戴维南定理

任何一个线性有源两端网络 N_A［图 8-1（a）］，对外电路来说，都可以等效为戴维南网络［图 8-1（b）］或诺顿网络［图 8-1（c）］。图中 U_0 为 N_A 的开路电压，I_s 为 N_A 端口短路时的电流，R_0 为 N_A 除源后的等效电阻。

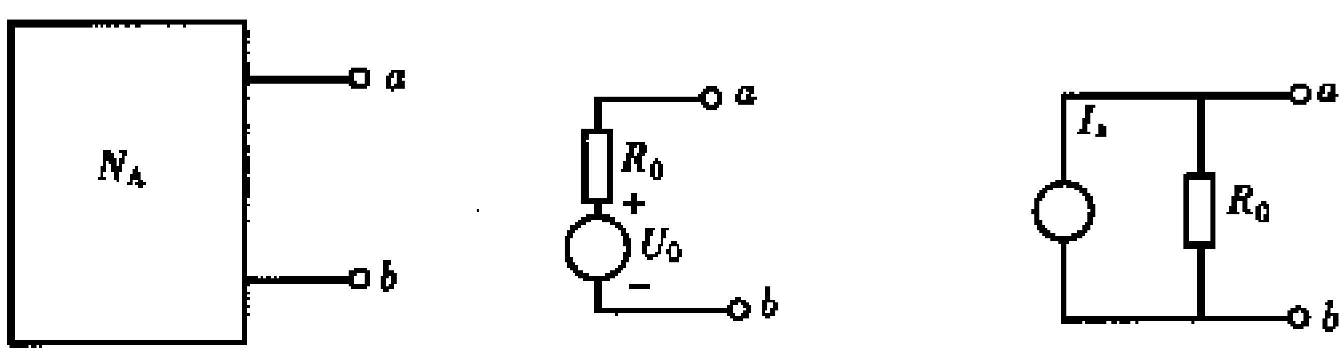


图 8-1

（三）正弦交流电路

1. 有效值（均方根值）　$X = \left[(1/T)\int_0^T x^2(t)\mathrm{d}t\right]^{1/2}$

式中　X——正弦量的有效值；

T——正弦量的周期（s）；

$x(t)$——正弦量的瞬时值，如电压 u、电流 i、电动势 e 等。

2. 相量法

正弦量（例如电流）$i = \sqrt{2}I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$，可表示为相量形式：$\dot{I} = Ie^{j\varphi} = I\angle\varphi$

复阻抗　$Z = R + jX = |Z|\angle\varphi$（Ω）

复阻抗模　$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

阻抗角　$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{X}{R}(°)$

式中　X——电抗，其值为 $(X_L - X_C)(\Omega)$；

X_L——感抗，其值为 $X_L = \omega L(\Omega)$；

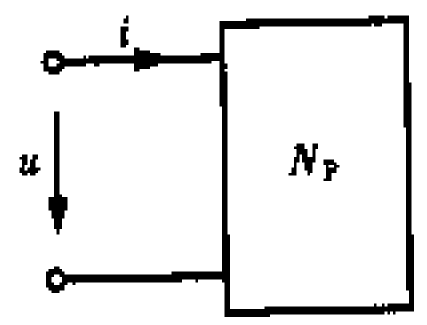
X_C——容抗，其值为 $X_L = 1/\omega C(\Omega)$。

3. 欧姆定律相量形式

$$\dot{U} = \dot{I}Z$$

4. 功率（见表 8-4）

正弦电路的功率 表 8-4

电路图	名称	公式	说明
	有功功率（平均功率）(W)	$P = UI\cos\varphi$	N_p——无源二端网络 φ——负载的阻抗角（°） 国家标准规定功率因数符号为 λ，大多教科书仍沿用 $\cos\varphi$
	无功功率 (Var)	$Q = UI\sin\varphi$	
	视在功率 (VA)	$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$	
	功率因数	$\cos\varphi = \dfrac{P}{S}$	

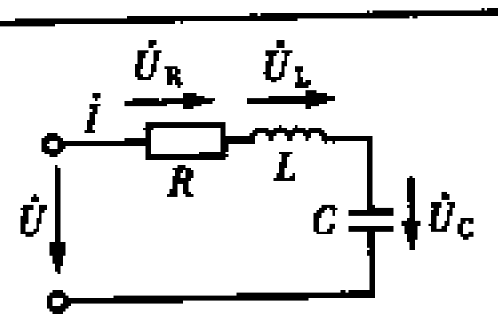
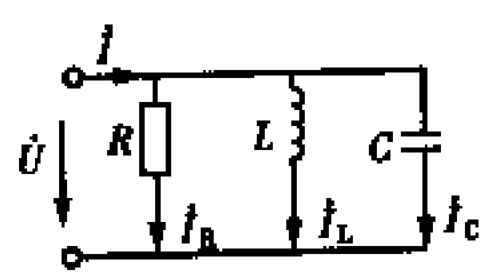
5. 三相电路（见表 8-5）

对称三相电路的基本关系式 表 8-5

名称	基本关系式	说明
三相电源	$\dot{U}_A = U_P\angle 0°$ $\dot{U}_B = U_P\angle -120°$ $\dot{U}_C = U_P\angle -240° = U_P\angle 120°$	U_A——A 相电压 (V) U_B——B 相电压 (V) U_C——C 相电压 (V) U_P——相电压 (V) U_l——线电压 (V) I_P——相电流 (A) I_l——线电流 (A)
负载星形连接	$U_l = \sqrt{3}U_P$ $I_l = I_P$	
负载三角形连接	$I_l = \sqrt{3}I_P$ $U_l = U_P$	

6. 谐振电路（见表 8-6）

RLC 电路中的谐振 表 8-6

电路形式		
谐振角频率 ω_0 (rad/s)	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
谐振时电路阻抗 Z (Ω)	R	R
品质因数 Q	$\dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{1}{\omega_0 CR}$	$\omega_0 RC = \dfrac{R}{\omega_0 L}$
频带宽 BW (rad/s)	$\dfrac{\omega_0}{Q}$	$\dfrac{\omega_0}{Q}$

（四）RC 和 RL 电路暂态过程

1. 换路定律 $u_c(0^+) = u_c(0^-)$；$i_L(0^+) = i_L(0^-)$。

2. 三要素法 $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau}$

式中 $f(t)$——电路的全响应；

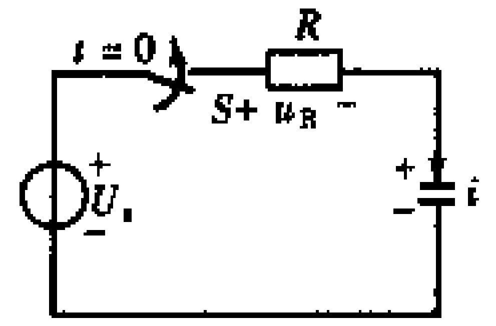
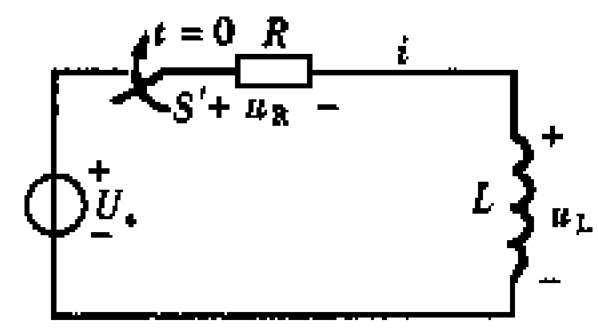
$f(\infty)$——响应的稳态值；

$f(0^+)$——响应的初始值；

τ——电路的时间常数 (s)。

3. RC 和 RL 电路暂态过程（见表 8-7）

RC 和 RL 电路暂态过程 **表 8-7**

电路形式		
$t \geqslant 0$ 时 电路响应	$u_c(t)=u_c(0^+)e^{-t/RC}+U_s(1-e^{-t/RC})$ $i(t)=\dfrac{U_s-u_c(0^+)}{R}e^{-t/RC}$ $u_R(t)=R\cdot i(t)=[U_s-u_c(0^+)]e^{-t/RC}$	$i_L(t)=i_L(0^+)e^{-Rt/L}+\dfrac{U_s(1-e^{-Rt/L})}{R}$ $U_R(t)=i_L(t)\cdot R$ $=i_L(0^+)Re^{-Rt/L}+U_s(1-e^{-Rt/L})$ $u_L(t)=L(di_L/dt)$ $=-i_L(0^+)Re^{-Rt/L}+U_se^{-Rt/L}$
说　明	$u_c(0^+),i_L(0^+)$——分别为电容电压和电感电流的初始值 $RC,L/R$——分别为 RC 电路和 RL 电路的时间常数	

（五）变压器与电动机

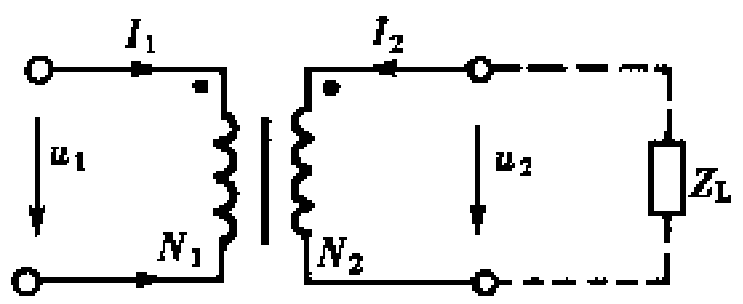


图 8-2

1. 理想变压器（图 8-2）的匝数比

$$k = N_1/N_2 \approx U_1/U_2 = I_2/I_1$$

输入阻抗　　$Z_1 = k^2 \cdot Z_L$

2. 三相异步电动机转速 n 为

$$n = (1-s)60f_1/p\,(\mathrm{r/min})$$

式中　s——转差率，也称滑差率，其值为$(n_1-n)/n_1$；

p——磁极对数；

f_1——电源频率（Hz）。

三相异步电动机同步转速 n_1 为　$n_1 = 60f_1/p\,(\mathrm{r/min})$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{异步电动机的输入功率} & P_1=\sqrt{3}U_1I_1\cos\varphi_1(W)\\ \text{异步电动机的输出功率} & P_2=\eta P_1(W)\end{array}\right\}$$

式中　U_1——异步电动机的定子电压（V）；

I_1——异步电动机的定子电流（A）；

$\cos\varphi_1$——异步电动机的功率因数；

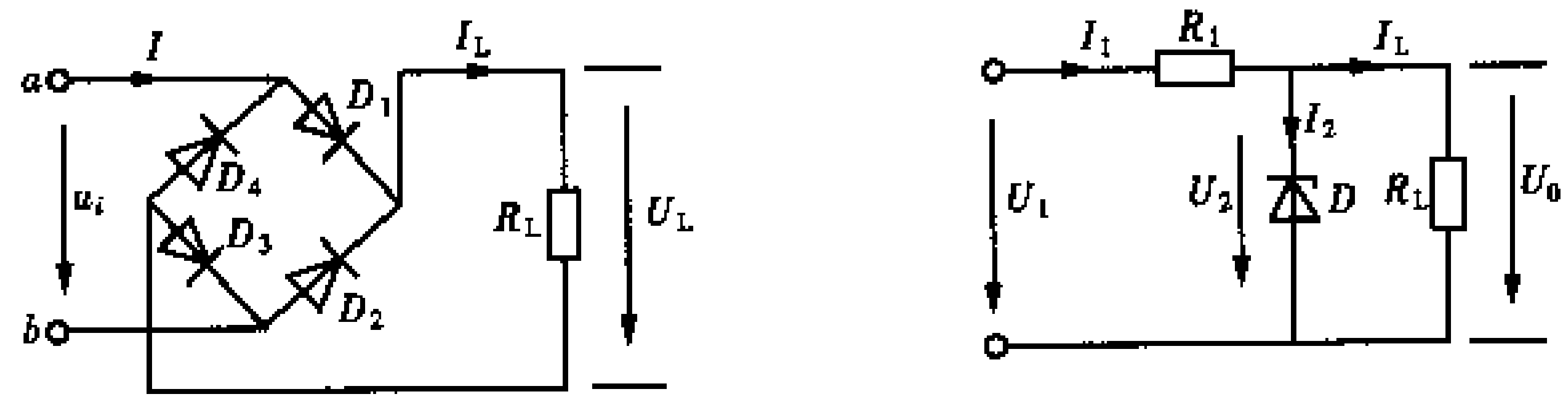
η——异步电动机的效率。

（六）二极管及整流、稳压电路

1. 晶体二极管

正向导通时，硅管压降为 0.6～0.7V，锗管为 0.2～0.3V。理想二极管正向导通时的管压降为零，反偏时，可以将其看成开路。

利用二极管可组成桥式整流电路，如图 8-3（a）所示。图中 $U_L \approx 0.9U_i$；若在电路输出端与负载 R_L 并联一个电容 C，且使 $R_LC =$（3～5）T/2（T 为电源电压 u_i 的周期），则



(a)　　　　　　　　　　(b)

图 8-3

$U_L \approx 1.2U_i$。

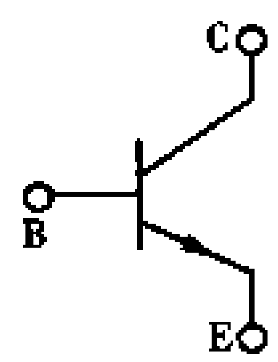
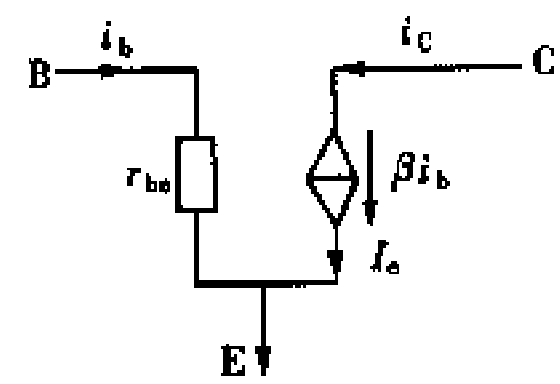
2. 稳压二极管

稳压二极管的稳定电压为 U_z，稳定电流为 I_z，两者变化量之比称为动态电阻，即 $r_z = \Delta U_z/\Delta I_z$。利用稳压二极管组成的稳压电路，如图 8-3（*b*）所示。

（七）三极管及单管放大电路

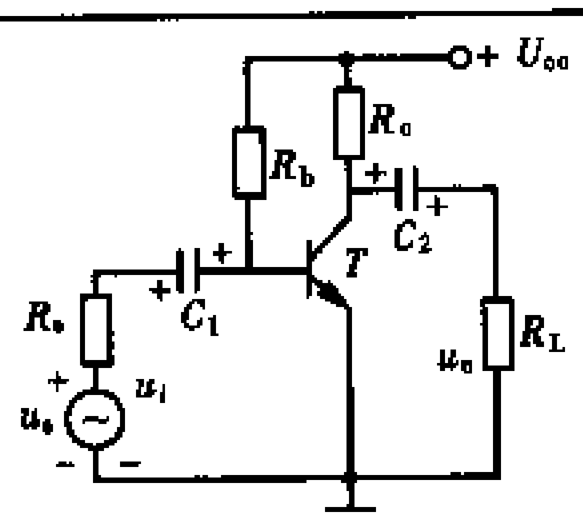
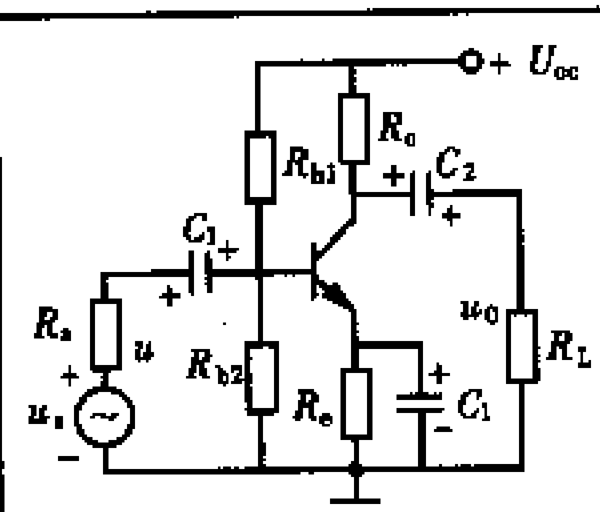
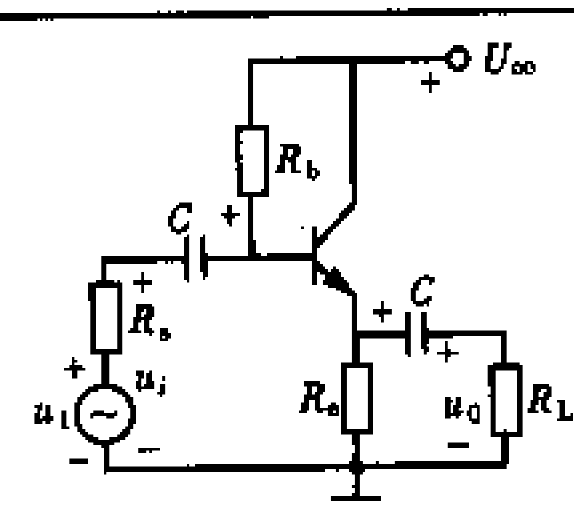
1. 三极管（见表 8-8）

三极管（NPN 型）　　　　表 8-8

器件符号	数学关系式	工作状态	小信号模型
	$i_E = i_C + i_B$ 导通时硅管的 U_{BE} 为（0.6～0.8V） 锗管为（0.1～0.3V）	放大区 $I_C = \beta I_B$ 饱和区 $I_B > 0$ $\beta I_B > I_C > 0$ 截止区 $I_B \leqslant 0$	 $r_{be} = 300 + (1+\beta)\dfrac{26}{I_E\ (mA)}$

2. 单管放大电路（见表 8-9）

单管放大器电路　　　　表 8-9

电路名称	共发射极电路		共集电极电路
	固定偏流式电路	射极偏置电路	
电路图			
静态工作点	$I_B = \dfrac{U_{CC} - U_{BE}}{R_b}$ $I_C = \beta I_B$ $U_{CE} = U_{CC} - I_C R_C$	$U_B = U_{CC}\dfrac{R_{b2}}{R_{b1} + R_{b2}}$ $I_C \approx I_E = \dfrac{U_B - U_{BE}}{R_e}$ $I_B = \dfrac{I_C}{\beta}$ $U_{CE} \approx U_{CC} - I_C(R_C + R_e)$	$I_B = \dfrac{U_{CC} - U_{BE}}{R_b + (1+\beta)R_e}$ $I_C + \beta I_B$ $U_{CE} = U_{CC} - I_C R_e$

电路名称	共发射极电路		共集电极电路
	固定偏流式电路	射极偏置电路	
电压放大倍数 $A_u=\frac{\dot U_0}{\dot U_i}$	$A_u=-\frac{\beta R'_L}{r_{be}}$ $(R_L=R_c//R_L)$	$A_u=-\frac{\beta R'_L}{r_{be}}$ $(R'_L=R_c//R_L)$	$A_u=\frac{(1+\beta)R'_L}{r_{be}+(1+\beta)R'_L}$ $(R'_L=R_e//R_L)$ ≈ 1
输入电阻 r_i	$r_i=R_b//r_{be}$	$r_i=R_{b1}//R_{b2}//r_{be}$	$r_i=R_b//[r_{be}+(1+\beta)R'_L]$
输出电阻 r_0	$r_0\approx R_c$	$r_0\approx R_c$	$r_0=R_e//\frac{r_{be}+R'_s}{1+\beta}$ $(R'_s=R_s//R_b)$

（八）运算放大器

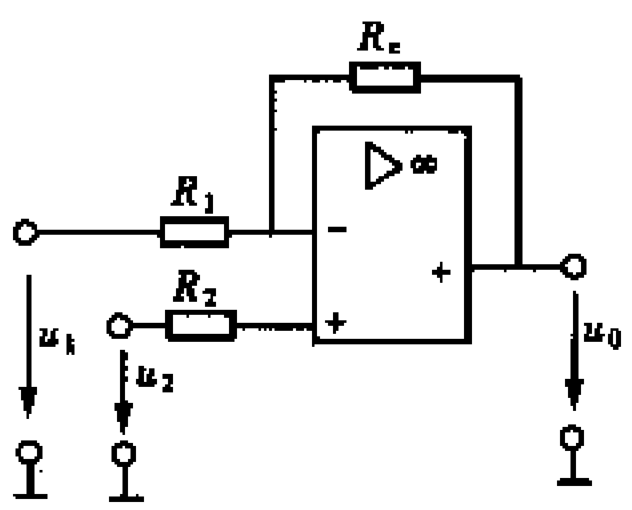
理想运放组成的电路（图 8-4（a）），其输出为

$$u_0=-\frac{R_F}{R_1}u_1+\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)u_2$$

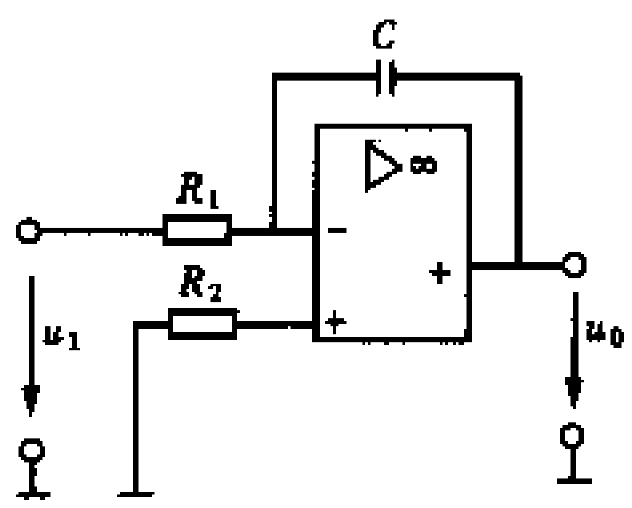
若 $u_1=0$，则 $u_0=\left(1+\frac{R_F}{R_1}\right)U_2$

若 $u_2=0$，则 $u_0=-\frac{R_F}{R_1}u_1$

图 8-4b 所求的积分器，其输出为 $u_0=-\frac{1}{R_1C}\int u_i\mathrm{d}t$



(a)



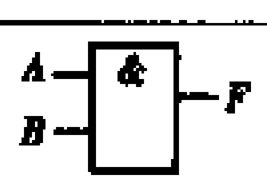
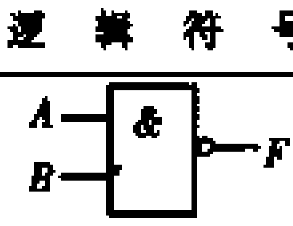
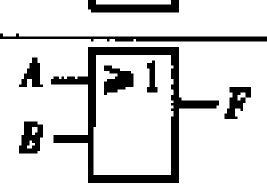
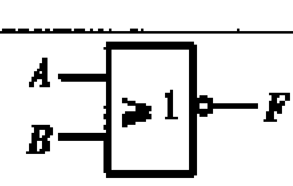
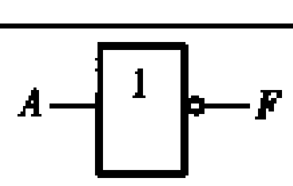
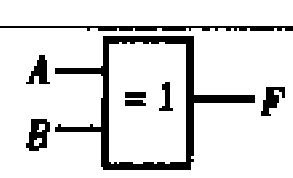
(b)

图 8-4

（九）门电路和触发器

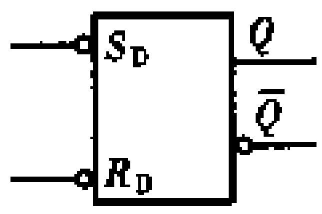
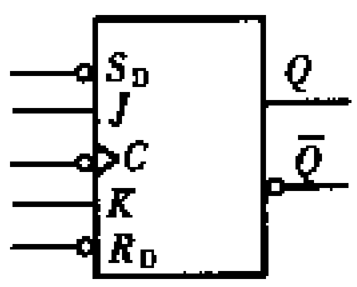
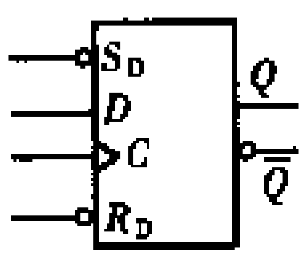
1. 门电路（见表 8-10）

几种门电路的逻辑符号和表达式　　表 8-10

名　称	逻　辑　符　号	逻辑函数表示式	名　称	逻　辑　符　号	逻辑函数表示式
与　门		$F=AB$	与非门		$F=\overline{AB}$
或　门		$F=A+B$	或非门		$F=\overline{A+B}$
非　门		$F=\overline{A}$	异或门		$F=A\oplus B$ $\overline{A}B+A\overline{B}$

2. 触发器（见表 8-11）

几种触发器的逻辑符号和逻辑状态转换表　　表 8-11

名　称	逻 辑 符 号	逻辑状态转换
基本 RS 触发器 （双与非门）		<table><tr><th>S</th><th>R</th><th>Q^{n+1}</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>Q^n</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>不定</td></tr></table>
JK 触发器		<table><tr><th>J</th><th>K</th><th>Q^{n+1}</th></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>Q^n</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>$\overline{Q^n}$</td></tr></table>
D 触发器		<table><tr><th>D</th><th>Q^{n+1}</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>

九、工程经济

建设资金时间价值复利计算基本公式及标准代号见表 9-1。一次支付、等额多次支付复利因子见表 9-20。

建设资金时间价值复利计算基本公式及标准代号　　表 9-1

待求	已知	因子名称	标准代号	代数式	计算公式	说　明
F	P	复利终值因子	(F/。P, i%, n)	$(1+i)^n$	F = P (F/P, i%, n)	一次支付
P	F	复利现值因子	(P/F, i%, n)	$\frac{1}{(1+i)^n}$	P = F (P/F, i%, n)	
F	A	年金终值因子	(F/A, i%, n)	$\frac{(1+i^n)-1}{i}$	F = A (F/A, i%, n)	等额多次支付
A	F	偿债基金因子	(A/F, i%, n)	$\frac{i}{(1+i)^n-1}$	A = F (A/F, i%, n)	
A	P	资金回收因子	(A/P, i%, n)	$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	A = P (A/P, i%, n)	
P	A	年金现值因子	(P/A, i%, n)	$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	P = A (P/A, i%, n)	

P——现值；F——终值；A——等额年金；i——利率；n——计息期

present Final ~~present~~

一次支付、等额多次支付复利因子表（4%复利因子）　　表 9-2

一次支付			等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.0400	0.9615	1.0000	0.9615	1.0000	1.0400	1
2	1.0816	0.9246	2.0400	1.8861	0.4902	0.5302	2
3	1.1249	0.8890	3.1216	2.7751	0.3203	0.3603	3
4	1.1699	0.8548	4.2465	3.6299	0.2355	0.2765	4
5	1.2167	0.8219	5.4193	4.4518	0.1846	0.2246	5
6	1.2653	0.7903	6.6330	5.2421	0.1508	0.1908	6
7	1.3159	0.7599	7.8983	6.0021	0.1266	0.1666	7
8	1.3686	0.7307	9.2142	6.7327	0.1085	0.1485	8
9	1.4233	0.7026	10.5828	7.4353	0.0945	0.1345	9
10	1.4802	0.6756	12.0061	8.1109	0.0833	0.1233	10
11	1.5395	0.6496	13.4863	8.7605	0.0741	0.1141	11
12	1.6010	0.6246	15.0258	9.3851	0.0666	0.1066	12
13	1.6651	0.6006	16.6268	9.9856	0.0601	0.1001	13
14	1.7317	0.5775	18.2919	10.5631	0.0547	0.947	14
15	1.8009	0.5553	20.0236	11.1184	0.0499	0.0899	15
16	1.8730	0.5339	21.8245	11.6523	0.0458	0.0858	16
17	1.9479	0.5134	23.6975	12.1657	0.0422	0.0822	17
18	2.0258	0.4936	25.6454	12.6593	0.0390	0.0790	18
19	2.1068	0.4746	27.6712	13.1399	0.0361	0.0761	19
20	2.1911	0.4564	29.7781	13.5903	0.0336	0.0736	20
21	2.2788	0.4388	31.9692	14.0292	0.0313	0.0713	21
22	2.3699	0.4220	34.2480	14.4511	0.0292	0.0692	22
23	2.4647	0.4057	36.6179	14.8568	0.0273	0.0673	23
24	2.5633	0.3901	39.0826	15.2470	0.0256	0.0656	24
25	2.6658	0.3751	41.6459	15.6221	0.0240	0.0640	25
26	2.7725	0.3607	44.3117	15.9828	0.0226	0.0626	26
27	2.8834	0.3468	47.0842	16.3296	0.0212	0.0612	27
28	2.9987	0.3335	49.9676	16.6631	0.0200	0.0600	28
29	3.1187	0.3207	52.9663	16.9837	0.0189	0.0589	29
30	3.2434	0.3083	56.0849	17.2920	0.0178	0.0578	30
35	3.9461	0.2534	73.6522	18.6646	0.0136	0.0536	35
40	4.8010	0.2083	95.0255	19.7928	0.0105	0.0505	40
45	5.8412	0.1712	121.029	20.7200	0.0083	0.0483	45
50	7.1067	0.1407	152.667	21.4822	0.0066	0.0466	50
55	8.6464	0.1157	191.159	22.1086	0.0052	0.0452	55
60	10.5196	0.0961	237.991	22.6235	0.0042	0.0442	60
65	12.7987	0.0781	294.968	23.0467	0.0034	0.0434	65
70	15.5716	0.0642	364.290	23.3945	0.0027	0.0427	70
75	18.9452	0.0528	448.631	23.6804	0.0022	0.0422	75
80	23.0498	0.0434	551.245	23.9154	0.0018	0.0418	80
85	28.0486	0.0357	676.090	24.1085	0.0015	0.0415	85
90	34.1193	0.0293	827.98	24.2673	0.0012	0.0412	90
95	41.5113	0.0241	1012.78	24.3978	0.0010	0.0410	95
100	50.5049	0.0198	1237.62	24.5050	0.0008	0.0408	100

一次支付			等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.0500	0.9524	1.0000	0.9524	1.0000	1.0500	1
2	1.1025	0.9070	2.0500	1.8594	0.4878	0.5378	2
3	1.1576	0.8636	3.1525	2.7232	0.3172	0.3672	3
4	1.2155	0.8227	4.3101	3.5460	0.2320	0.2820	4
5	1.2768	0.7835	5.5256	4.3295	0.1810	0.2310	5
6	1.3401	0.7462	6.8019	5.0757	0.1470	0.1970	6
7	1.4071	0.7107	8.1420	5.7864	0.1223	0.1728	7
8	1.4775	0.6768	9.5491	6.4632	0.1047	0.1547	8
9	1.5513	0.6446	11.0266	7.1078	0.0907	0.1407	9
10	1.6289	0.6139	12.5779	7.7217	0.0795	0.1295	10
11	1.7103	0.5847	14.2068	8.3064	0.0704	0.1204	11
12	1.7959	0.5568	15.9171	8.8633	0.0628	0.1128	12
13	1.8856	0.5303	17.7130	9.3936	0.0565	0.1065	13
14	1.9799	0.5051	19.5986	9.8986	0.0510	0.1010	14
15	2.0789	0.4810	21.5786	10.3797	0.0463	0.0963	15
16	2.1829	0.4581	23.6575	10.8378	0.0423	0.0923	16
17	2.2920	0.4363	25.8404	11.2741	0.0387	0.0887	17
18	2.4066	0.4155	28.1324	11.6896	0.0355	0.0855	18
19	2.5269	0.3957	30.5390	12.0853	0.0327	0.0827	19
20	2.6533	0.3769	33.0659	12.4622	0.0302	0.0802	20
21	2.7860	0.3589	35.7192	12.8212	0.0280	0.0780	21
22	2.9253	0.3418	38.5052	13.1630	0.0260	0.0760	22
23	3.0715	0.3256	41.4305	13.4886	0.0240	0.0741	23
24	3.2251	0.3101	44.5020	13.7986	0.0225	0.0725	24
25	3.3864	0.2953	47.7271	14.0939	0.0210	0.0710	25
26	3.5557	0.2812	51.1134	14.3752	0.0196	0.0696	26
27	3.7335	0.2678	54.6691	14.6430	0.0183	0.0683	27
28	3.9201	0.2551	58.4026	14.8981	0.0171	0.0671	28
29	4.1161	0.2429	62.3227	15.1411	0.0160	0.0660	29
30	4.3219	0.2314	66.4388	15.3725	0.0151	0.0651	30
35	5.5160	0.1813	90.3203	16.3742	0.0111	0.0611	35
40	7.0400	0.1420	120.800	17.1591	0.0083	0.0583	40
45	8.9850	0.1113	159.700	17.7741	0.0063	0.0563	45
50	11.4674	0.0872	209.348	18.2559	0.0048	0.0548	50
55	14.6356	0.0683	272.713	18.6335	0.0037	0.0537	55
60	18.6792	0.0535	353.584	18.9293	0.0028	0.0528	60
65	23.8399	0.0419	456.798	19.1611	0.0022	0.0522	65
70	30.4264	0.0329	588.528	19.3427	0.0017	0.0517	70
75	38.8327	0.0258	756.653	19.4850	0.0013	0.0513	75
80	49.5614	0.0202	971.228	19.5965	0.0010	0.0510	80
85	63.2543	0.0158	1245.09	19.6838	0.0008	0.0508	85
90	80.7303	0.0124	1594.61	19.7523	0.0006	0.0506	90
95	103.035	0.0097	2040.69	19.8059	0.0005	0.0505	95
100	131.501	0.0076	2610.02	19.8479	0.0004	0.0504	100

一次支付、等额多次支付复利因子表（6%复利因子） 续表

	一次支付		等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.0600	0.0434	1.0000	0.9434	1.0000	1.0600	1
2	1.1236	0.8900	2.0600	1.8334	0.4854	0.5454	2
3	1.1910	0.8396	3.1830	2.6730	0.3141	0.3741	3
4	1.2625	0.7091	4.3746	3.4651	0.2286	0.2886	4
5	1.3382	0.7473	5.6871	4.2124	0.1774	0.2374	5
6	1.4185	0.7050	6.9753	4.9173	0.1434	0.2034	6
7	1.5036	0.6651	8.3938	5.5824	0.1191	0.1791	7
8	1.5938	0.6274	9.8975	6.2098	0.1010	0.1610	8
9	1.6895	0.5919	11.4913	6.8017	0.0870	0.1470	9
10	1.7908	0.5584	13.1808	7.3601	0.0759	0.1359	10
11	1.8983	0.5268	14.9716	7.8869	0.0668	0.1268	11
12	2.0122	0.4970	16.8699	8.3838	0.0593	0.1193	12
13	2.1329	0.4688	18.8821	8.8527	0.0530	0.1130	13
14	2.2609	0.4423	21.0151	9.2950	0.0476	0.1076	14
15	2.3966	0.4173	23.2760	9.7122	0.0430	0.1030	15
16	2.5404	0.3936	25.6725	10.1059	0.0390	0.0990	16
17	2.6928	0.3714	28.2129	10.4773	0.0354	0.0954	17
18	2.8543	0.3503	30.9056	10.8276	0.0324	0.0924	18
19	3.0256	0.3305	33.7600	11.1581	0.0296	0.0896	19
20	3.2071	0.3118	36.7856	11.4699	0.0272	0.0872	20
21	3.3996	0.2942	39.9927	11.7641	0.0250	0.0850	21
22	3.6035	0.2775	43.3923	12.0416	0.0230	0.0830	22
23	3.8197	0.2618	46.9958	12.3034	0.0213	0.0813	23
24	4.0489	0.2470	50.8155	12.5504	0.0197	0.0797	24
25	4.2919	0.2330	54.8645	12.7834	0.0182	0.0782	25
26	4.5494	0.2198	59.1563	13.0032	0.0169	0.0760	26
27	4.8223	0.2074	63.7057	13.2105	0.0157	0.0757	27
28	5.1117	0.1956	68.5281	13.4062	0.0146	0.0746	28
29	5.4184	0.1846	73.6397	13.5907	0.0136	0.0736	29
30	5.7435	0.1741	79.0581	13.7648	0.0126	0.0726	30
35	7.6861	0.1301	111.435	14.4982	0.0090	0.0690	35
40	10.2857	0.0972	154.762	15.0463	0.0065	0.0665	40
45	13.7646	0.0727	212.743	15.4558	0.0047	0.0647	45
50	18.4201	0.0543	290.336	15.7619	0.0034	0.0634	50
55	24.6503	0.0406	394.172	15.9905	0.0025	0.0625	55
60	32.9876	0.0303	533.128	16.1614	0.0019	0.0619	60
65	44.1449	0.0227	719.082	16.2891	0.0014	0.0614	65
70	59.0758	0.0169	967.931	16.3845	0.0010	0.0610	70
75	79.0568	0.0126	1300.95	16.4558	0.0008	0.0608	75
80	105.796	0.0095	1746.60	16.5091	0.0006	0.0606	80
85	141.579	0.0071	2342.98	16.5489	0.0004	0.0604	85
90	189.464	0.0053	3141.07	16.5787	0.0003	0.0603	90
95	253.546	0.0039	4209.10	16.6009	0.0002	0.0602	95
100	339.301	0.0029	5638.36	16.6175	0.0002	0.0602	100

一次支付、等额多次支付复利因子表（8%复利因子）　　续表

	一次支付		等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.0800	0.9259	1.0000	0.9259	1.0000	1.0800	1
2	1.1664	0.8573	2.0800	1.7833	0.4808	0.5608	2
3	1.2597	0.7938	3.2464	2.5771	0.3080	0.3880	3
4	1.3605	0.7350	4.5061	3.3121	0.2219	0.3019	4
5	1.4693	0.6806	5.8666	3.9927	0.1705	0.2505	5
6	1.5869	0.6302	7.3359	4.6229	0.1363	0.2163	6
7	1.7138	0.5835	8.9228	5.2064	0.1121	0.1921	7
8	1.8509	0.5403	10.6366	5.7466	0.0940	0.1740	8
9	1.9990	0.5002	12.4876	6.2469	0.0801	0.1601	9
10	2.1589	0.4632	14.4866	6.7101	0.0690	0.1490	10
11	2.3316	0.4289	16.6455	7.1390	0.0601	0.1401	11
12	2.5182	0.3971	18.9771	7.5361	0.0527	0.1327	12
13	2.7196	0.3677	21.4953	7.9038	0.0465	0.1265	13
14	2.9372	0.3405	24.2149	8.2442	0.0413	0.1213	14
15	3.1722	0.3152	27.1521	8.5595	0.0368	0.1168	15
16	3.4269	0.2910	30.3243	8.8514	0.0330	0.1130	16
17	3.7000	0.2703	33.7502	9.1216	0.0296	0.1096	17
18	3.9960	0.2502	37.4502	9.3719	0.0267	0.1067	18
19	4.3157	0.2117	41.4463	9.6036	0.0241	0.1041	19
20	4.6610	0.2145	45.7620	9.8181	0.0219	0.1019	20
21	5.0338	0.1987	50.4229	10.0168	0.0198	0.0998	21
22	5.4365	0.1839	55.4567	10.2007	0.0180	0.0980	22
23	5.8715	0.1703	60.8933	10.3711	0.0164	0.0964	23
24	6.3412	0.1577	66.7647	10.5288	0.0150	0.0950	24
25	6.8485	0.1460	73.1059	10.6748	0.0137	0.0937	25
26	7.3964	0.1352	79.9544	10.8100	0.0125	0.0925	26
27	7.9881	0.1252	87.3507	10.9352	0.0114	0.0914	27
28	8.6271	0.1159	95.3388	11.0511	0.0105	0.0905	28
29	9.3173	0.1073	103.966	11.1584	0.0096	0.0896	29
30	10.0627	0.0994	113.283	11.2578	0.0088	0.0888	30
35	14.7853	0.0676	172.317	11.6546	0.0058	0.0858	35
40	21.7245	0.0460	259.056	11.9246	0.0039	0.0839	40
45	31.9204	0.0313	386.506	12.1084	0.0026	0.0826	45
50	46.9016	0.0213	573.770	12.2335	0.0017	0.0817	50
55	68.9138	0.0145	848.923	12.3186	0.0012	0.0812	55
60	101.257	0.0099	1253.21	12.3766	0.0008	0.0808	60
65	148.780	0.0067	1847.25	12.4160	0.0005	0.0805	65
70	218.606	0.0046	2720.08	12.4428	0.0004	0.0804	70
75	321.204	0.0031	4002.55	12.4611	0.0002	0.0802	75
80	471.955	0.0021	5886.93	12.4735	0.0002	0.0802	80
85	693.456	0.0014	8655.71	12.4820	0.0001	0.0801	85
90	1018.92	0.0010	12723.9	12.4877	a	0.0801	90
95	1497.12	0.0007	18071.5	12.4917	a	0.0801	95
100	2199.76	0.0005	27484.5	12.4943	a	0.0800	100

一次支付、等额多次支付复利因子表（10%复利因子） 续表

一次支付			等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.1000	0.9091	1.0000	0.9091	1.0000	1.1000	1
2	1.2100	0.8264	2.1000	1.7355	0.4762	0.5762	2
3	1.3310	0.7513	3.3100	2.4809	0.3021	0.4021	3
4	1.4641	0.6830	4.6410	3.1609	0.2155	0.3155	4
5	1.6105	0.6209	6.1051	3.7908	0.1638	0.2638	5
6	1.7716	0.5645	7.7156	4.3553	0.1296	0.2296	6
7	1.9487	0.5132	9.4872	4.8684	0.1054	0.2054	7
8	2.1436	0.4665	11.4369	5.3349	0.0874	0.1874	8
9	2.3579	0.4241	13.5795	5.7590	0.0736	0.1736	9
10	2.5937	0.3855	15.9374	6.1446	0.0627	0.1627	10
11	2.8531	0.3505	18.5312	6.4951	0.0540	0.1540	11
12	3.1384	0.3186	21.8843	6.8137	0.0468	0.1468	12
13	3.4523	0.2897	24.5227	7.1034	0.0408	0.1408	13
14	3.7975	0.2633	27.9750	7.3667	0.0357	0.1357	14
15	4.1772	0.2394	31.7725	7.6061	0.0315	0.1315	15
16	4.5950	0.2176	35.9497	7.8237	0.0278	0.1278	16
17	5.0545	0.1978	40.5447	8.0216	0.0247	0.1247	17
18	5.5599	0.1799	45.5992	8.2014	0.0219	0.1219	18
19	6.1159	0.1635	51.1591	8.3649	0.0195	0.1195	19
20	6.7275	0.1486	57.2750	8.5136	0.0175	0.1175	20
21	7.4002	0.1351	64.0025	8.6487	0.0156	0.1150	21
22	8.1403	0.1228	71.4027	8.7715	0.0140	0.1140	22
23	8.9543	0.1117	79.5430	8.8832	0.0126	0.1126	23
24	9.8494	0.1015	88.4973	8.9847	0.0113	0.1113	24
25	10.8347	0.0923	98.3470	9.0770	0.0102	0.1102	25
26	11.9182	0.0839	109.182	9.1609	0.0092	0.1092	26
27	13.1100	0.0763	121.100	9.2372	0.0083	0.1083	27
28	14.4210	0.0693	134.210	9.3066	0.0075	0.1075	28
29	15.8631	0.0680	148.631	9.3696	0.0067	0.1067	29
30	17.4494	0.0573	164.494	9.4269	0.0061	0.1061	30
35	28.1024	0.0356	271.024	9.6442	0.0037	0.1037	35
40	45.2592	0.0221	442.592	9.7791	0.0023	0.1033	40
45	72.8904	0.0137	718.905	9.8628	0.0014	0.1024	45
50	117.391	0.0085	1163.91	9.9148	0.0009	0.1019	50
55	189.059	0.0053	1880.59	9.9471	0.0005	0.1005	55
60	304.481	0.0033	3034.81	9.9672	0.0003	0.1003	60
65	490.370	0.0020	4893.71	9.9796	0.0002	0.1002	65
70	780.746	0.0013	7887.47	9.9873	0.0001	0.1001	70
75	1271.89	0.0008	12708.9	9.9921	α	0.1001	75
80	2048.40	0.0005	20474.0	9.9951	α	0.0000	80
85	3298.97	0.0003	32979.7	9.9970	α	0.1000	85
90	5313.02	0.0002	53120.2	9.9981	α	0.1000	90
95	8556.67	0.0001	85556.7	9.9988	α	0.1000	95
100	13780.6	α	137796	9.9993	α	0.1000	100

一 次 支 付			等 额 多 次 支 付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.1200	0.8929	1.0000	0.8929	1.0000	1.1200	1
2	1.2544	0.7972	2.1200	1.6901	0.4717	0.5917	2
3	1.4049	0.7118	3.3744	2.4018	0.2963	0.4163	3
4	1.5735	0.6355	4.7793	3.0373	0.2092	0.3292	4
5	1.7623	0.5674	6.3528	3.6048	0.1574	0.2774	5
6	1.9738	0.5066	8.1152	4.1114	0.1232	0.2432	6
7	2.2107	0.4523	10.0890	4.5638	0.0991	0.2191	7
8	2.4760	0.4039	12.2997	4.9676	0.0813	0.2013	8
9	2.7731	0.3606	14.7757	5.3282	0.0677	0.1877	9
10	3.1058	0.3220	17.5487	5.6502	0.0570	0.1770	10
11	3.4785	0.2875	20.6546	5.9377	0.0484	0.1684	11
12	3.8960	0.2567	24.1331	6.1944	0.0414	0.1614	12
13	4.3635	0.2292	28.0291	6.4235	0.0357	0.1557	13
14	4.8871	0.2046	32.3926	6.6282	0.0309	0.1509	14
15	5.4730	0.1827	37.2797	6.8109	0.0268	0.1468	15
16	6.1304	0.1631	42.7533	6.9740	0.0234	0.1434	16
17	6.8660	0.1456	48.8837	7.1196	0.0205	0.1405	17
18	7.6900	0.1300	55.7497	7.2497	0.0179	0.1379	18
19	8.6128	0.1161	63.4397	7.3658	0.0158	0.1358	19
20	9.6463	0.1037	72.0524	7.4694	0.0139	0.1339	20
21	10.8038	0.0926	81.6987	7.5620	0.0122	0.1322	21
22	12.1003	0.0826	92.5026	7.6446	0.0108	0.1308	22
23	13.5523	0.0738	104.603	7.7184	0.0096	0.1296	23
24	15.1786	0.0659	118.155	7.7843	0.0085	0.1285	24
25	17.0001	0.0588	133.334	7.8431	0.0075	0.1275	25
26	19.0401	0.0525	150.334	7.8957	0.0067	0.1267	26
27	21.3249	0.0469	169.374	7.9426	0.0059	0.1259	27
28	23.8839	0.0419	190.699	7.9844	0.0052	0.1252	28
29	26.7499	0.0374	214.583	8.0218	0.0047	0.1247	29
30	29.9599	0.0334	241.333	8.0552	0.0041	0.1241	30
35	52.7996	0.0189	431.663	8.1755	0.0023	0.1223	35
40	93.0509	0.0107	767.091	8.2438	0.0013	0.1213	40
45	163.988	0.0061	1358.23	8.2825	0.0007	0.1207	45
50	289.002	0.0035	2400.02	8.3045	0.0004	0.1204	50
55	509.320	0.0020	4236.00	8.3170	0.0002	0.1202	55
60	897.596	0.0011	7471.63	8.3240	0.0001	0.1201	60
65	1581.87	0.0006	13173.9	8.3281	α	0.1201	65
70	2787.80	0.0004	23223.3	8.3303	α	0.1200	70
75	4913.05	0.0002	40933.8	8.3316	α	0.1200	75
80	8068.47	0.0001	72145.6	8.3324	α	0.1200	80

	一次支付		等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.1500	0.8696	1.0000	0.8000	1.0000	1.1500	1
2	1.3225	0.7501	2.1500	1.6257	0.4651	0.6151	2
3	1.5209	0.6575	3.4725	2.2832	0.2880	0.4380	3
4	1.7490	0.5718	4.9934	2.8550	0.2003	0.3503	4
5	2.0114	0.4972	6.7424	3.3522	0.1483	0.2983	5
6	2.3131	0.4323	8.7537	3.7845	0.1142	0.2642	6
7	2.6600	0.3759	11.0668	4.1604	0.0904	0.2404	7
8	3.0579	0.3269	13.7268	4.4873	0.0729	0.2229	8
9	3.5179	0.2843	16.7858	4.7716	0.0596	0.2096	9
10	4.0456	0.2472	20.3037	5.0188	0.0493	0.1993	10
11	4.6524	0.2149	24.3493	5.2337	0.0411	0.1911	11
12	5.3502	0.1869	29.0017	5.4206	0.0345	0.1845	12
13	6.1528	0.1625	34.3519	5.5831	0.0291	0.1791	13
14	7.0757	0.1413	40.5047	5.7245	0.0247	0.1747	14
15	8.1371	0.1229	47.5804	5.8474	0.0210	0.1710	15
16	9.3576	0.1069	55.7175	5.9542	0.0179	0.1670	16
17	10.7613	0.0929	65.0751	6.0072	0.0154	0.1654	17
18	12.3755	0.0808	75.8363	6.1280	0.0132	0.1632	18
19	14.2318	0.0703	88.2118	6.1982	0.0113	0.1613	19
20	16.3665	0.0611	102.444	6.2593	0.0098	0.1598	20
21	18.8215	0.0531	118.810	6.3125	0.0084	0.1584	21
22	21.6447	0.0462	137.632	6.3587	0.0073	0.1573	22
23	24.8915	0.0402	159.276	6.3988	0.0063	0.1563	23
24	28.6252	0.0349	184.168	6.4338	0.0054	0.1554	24
25	32.9189	0.0304	212.793	6.4641	0.0047	0.1547	25
26	37.8568	0.0264	245.712	6.4906	0.0041	0.1541	26
27	43.5353	0.0230	283.569	6.5135	0.0035	0.1535	27
28	50.0656	0.0200	327.104	6.5335	0.0031	0.1531	28
29	57.5754	0.0174	377.170	6.5509	0.0027	0.1527	29
30	66.2118	0.0151	434.745	6.5660	0.0023	0.1523	30
35	133.176	0.0075	881.170	6.6166	0.0011	0.1511	35
40	267.863	0.0037	1779.09	6.6418	0.0006	0.1506	40
45	538.769	0.0019	3585.13	6.6543	0.0003	0.1503	45
50	1083.66	0.0009	7217.71	6.6605	0.0001	0.1501	50
55	2179.62	0.0005	14524.1	6.6636	α	0.1501	55
60	4384.00	0.0002	29220.0	6.6651	α	0.1500	60
65	8817.78	0.0001	58778.5	6.6659	α	0.1500	65
70	17735.7	α	118231	6.6663	α	0.1500	70
75	35672.8	α	237812	6.6665	α	0.1500	75
80	71750.8	α	478332	6.6666	α	0.1500	80

一次支付			等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.2000	0.8333	1.0000	0.8333	1.0000	1.2000	1
2	1.4400	0.6944	2.2000	1.5278	0.4545	0.6545	2
3	1.7280	0.5787	3.6400	2.1065	0.2747	0.4747	3
4	2.0736	0.4823	5.3680	2.5887	0.1863	0.3863	4
5	2.4883	0.4019	7.4416	2.9906	0.1344	0.3344	5
6	2.0860	0.3349	9.9299	3.3255	0.1007	0.3007	6
7	3.5832	0.2791	12.9159	3.6046	0.0774	0.2774	7
8	4.2998	0.2326	16.4991	3.8372	0.0606	0.2606	8
9	5.1598	0.1938	20.7989	4.0310	0.0481	0.2481	9
10	6.1917	0.1615	25.9587	4.1925	0.0385	0.2385	10
11	7.4301	0.1346	32.1504	4.3271	0.0311	0.2311	11
12	8.9161	0.1122	39.5805	4.4392	0.0253	0.2253	12
13	10.6993	0.0935	48.4966	4.5327	0.0206	0.2206	13
14	12.8392	0.0779	59.1959	4.6106	0.0169	0.2169	14
15	15.4070	0.0649	72.0351	4.6755	0.0139	0.2139	15
16	18.4884	0.0541	87.4421	4.7296	0.0114	0.2114	16
17	22.1861	0.0451	105.931	4.7746	0.0094	0.2094	17
18	26.6233	0.0376	128.117	4.8122	0.0078	0.2078	18
19	31.9480	0.0313	154.740	4.8435	0.0065	0.2065	19
20	38.3376	0.0261	186.688	4.8696	0.0054	0.2054	20
21	46.0051	0.0217	225.026	4.8913	0.0044	0.2044	21
22	55.2061	0.0181	271.031	4.9094	0.0037	0.2037	22
23	66.2474	0.0151	326.237	4.9245	0.0031	0.2031	23
24	79.4968	0.0126	392.484	4.9371	0.0025	0.2025	24
25	95.3962	0.0105	471.981	4.9476	0.0021	0.2021	25
26	114.475	0.0087	567.377	4.9563	0.0018	0.2018	26
27	136.371	0.0073	681.853	4.9636	0.0015	0.2015	27
28	164.845	0.0061	819.223	4.9697	0.0012	0.2012	28
29	197.814	0.0051	984.068	4.9747	0.0010	0.2010	29
30	237.376	0.0042	1181.88	4.9789	0.0008	0.2008	30
35	590.668	0.0017	2948.34	4.9915	0.0003	0.2003	35
40	1469.77	0.0007	7343.85	5.9966	0.0001	0.2001	40
45	3657.26	0.0003	18281.3	4.9986	α	0.2001	45
50	9100.43	0.0001	45497.2	4.9995	α	0.2000	50
55	22644.8	α	113219	4.9998	α	0.2000	55
60	56347.5	α	281732	4.9999	α	0.2000	60

一次支付			等额多次支付				
N	F/P	P/F	F/A	P/A	A/F	A/P	N
1	1.2500	0.8000	1.0000	0.8000	1.0000	1.2500	1
2	1.5625	0.6400	2.2500	1.4400	0.4444	0.6944	2
3	1.9531	0.5120	3.8125	1.9520	0.2623	0.5123	3
4	2.4414	0.4096	5.7656	2.3616	0.1734	0.4234	4
5	3.0518	0.3277	8.2070	2.6893	0.1218	0.3718	5
6	3.8147	0.2621	11.2588	2.9514	0.0888	0.3388	6
7	4.7684	0.2097	15.0735	3.1611	0.0663	0.3163	7
8	5.9605	0.1678	19.8419	3.3289	0.0504	0.3004	8
9	7.4506	0.1342	25.8023	3.4631	0.0388	0.2888	9
10	9.3132	0.1074	33.2520	3.5705	0.0310	0.2801	10
11	11.6415	0.0859	42.5661	3.6564	0.0235	0.2735	11
12	14.5519	0.0687	54.2077	3.7251	0.0184	0.2684	12
13	18.1899	0.0550	68.7596	3.7801	0.0145	0.2645	13
14	22.7374	0.0440	86.9495	3.8241	0.0115	0.2615	14
15	28.4217	0.0352	109.687	3.8593	0.0091	0.2591	15
16	35.5271	0.0281	138.109	3.8874	0.0072	0.2572	16
17	44.4089	0.0225	173.636	3.9099	0.0058	0.2558	17
18	55.5112	0.0180	218.045	3.9279	0.0040	0.2546	18
19	69.3889	0.0144	273.556	3.9424	0.0037	0.2537	19
20	86.7362	0.0115	342.945	3.9539	0.0029	0.2529	20
21	108.420	0.0092	429.681	3.9631	0.0023	0.3523	21
22	135.525	0.0074	538.101	3.9705	0.0019	0.2519	22
23	169.407	0.0059	673.626	3.9764	0.0015	0.2515	23
24	211.758	0.0047	843.033	3.9811	0.0012	0.2512	24
25	264.698	0.0038	1054.79	3.9849	0.0009	0.2509	25
26	330.872	0.0030	1319.49	3.9879	0.0008	0.2508	26
27	413.590	0.0024	1650.36	3.9903	0.0006	0.2506	27
28	516.988	0.0019	2063.95	3.9923	0.0005	0.2505	28
29	646.235	0.0015	2580.94	3.9938	0.0004	0.2504	29
30	807.794	0.0012	3227.17	3.9950	0.0003	0.2503	30
35	2465.19	0.0004	9856.76	3.9984	0.0001	0.2501	35
40	7523.16	0.0001	30088.7	3.9995	α	0.2500	40
45	22958.9	α	91831.5	3.9998	α	0.2500	45
50	70064.9	α	280256	3.9999	α	0.2500	50

$\alpha < 0.0001$

十、结构力学

（一）结构位移计算的一般公式

$$\Delta = \Sigma\int(\overline{M}_{\kappa} + \overline{N}_{\varepsilon} + \overline{Q}_{\gamma_0})\mathrm{d}s - \Sigma\overline{R}kC_{k}$$

1. 荷载作用下各类结构的位移计算实用（简化）公式

（1）梁与刚架 $\Delta = \Sigma\int\frac{\overline{M}M_{\mathrm{P}}}{EI}\mathrm{d}s$

（2）桁架 $\Delta = \Sigma\frac{\overline{N}N_{\mathrm{P}}l}{EA}$

（3）桁、梁组合结构 $\Delta = \Sigma\int\frac{\overline{M}M_{\mathrm{P}}}{EI}\mathrm{d}s + \Sigma\frac{\overline{N}N_{\mathrm{P}}l}{EA}$

2. 温度变化时结构的位移计算公式

$$\Delta = \Sigma\alpha t_0\int\overline{N}\mathrm{d}s + \Sigma\frac{\alpha\Delta t}{h}\int\overline{M}\mathrm{d}s$$

式中 $k, \varepsilon, \gamma_0, C_k$——结构中实际的曲率、线应变、剪应变和支座位移

$\overline{M}, \overline{N}, \overline{Q}, \overline{R}_k$——单位荷载作用下引起结构内的弯矩、轴力、剪力以及移动支座上的反力；

α——材料线膨胀系数；

t_0——截面形心轴处的温度；

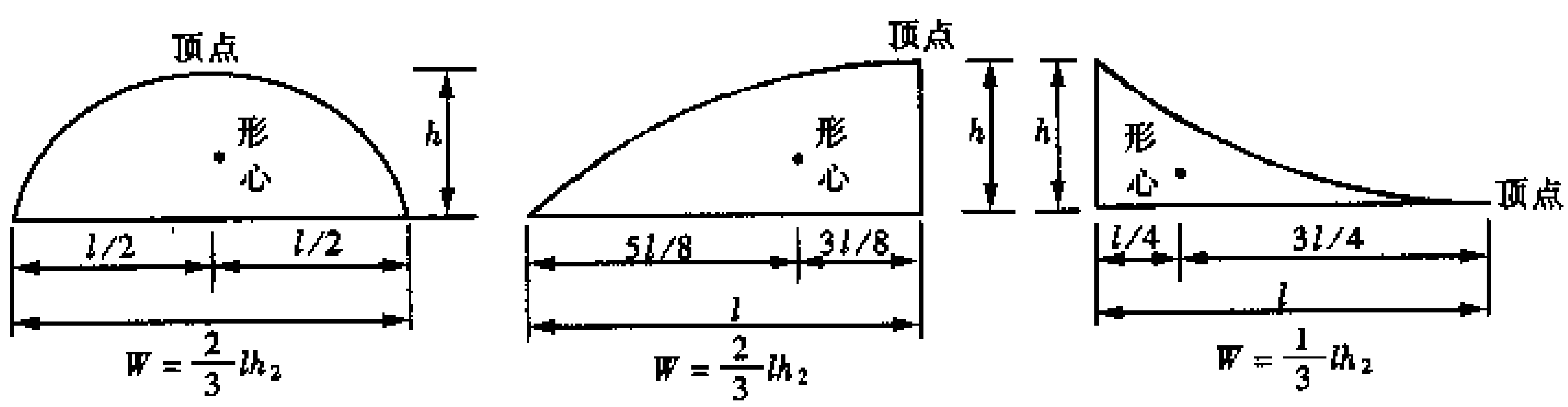
Δt——上、下表面温度之差；

h——截面高度；

E——弹性模量；

A，I——截面面积、惯性矩。

（二）图形相乘法中二次标准抛物线图形的面积 ω 及其形心位置



（三）结构动力计算的有关公式

1. 单自由度体系衰减振动的阻尼比（当 $\zeta < 0.2$ 时）

$$\zeta = \frac{1}{2n\pi}\ln\frac{y_k}{y_{k+n}} \quad （n 为周期数）$$

2. 简谐荷载作用下单自由度体系的动力系数

$$\beta = \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\zeta^2\frac{\theta^2}{\omega^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

3. 两个自由度体系的自振频率和主振型公式

刚度法

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k_{11}}{m_1} + \frac{k_{22}}{m_2}\right)^2 - \frac{4}{m_1 m_2}(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}\right]$$

柔度法

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{2}\left[(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) \pm \sqrt{(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})^2 - 4m_1 m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}\right]$$

第一主振型 $\qquad \dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} = -\dfrac{k_{12}}{k_{11} - m_1\omega_1^2} = -\dfrac{m_2\delta_{12}}{m_1\delta_{11} - \lambda_1}$

第二主振型 $\qquad \dfrac{Y_{12}}{Y_{22}} = -\dfrac{k_{12}}{k_{11} - m_1\omega_2^2} = -\dfrac{m_2\delta_{12}}{m_1\delta_{11} - \lambda_2}$

式中 ζ——阻尼比；

n——周期数；

ω——圆频率；

β——动力系数；

θ——简谐荷载的圆频率；

y_k, y_{k+n}——第 k 个及 $k+n$ 个振幅；

$K_{11}, k_{22}, k_{12} = k_{21}$——刚度系数；

$\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12} = \delta_{21}$——柔度系数；

$m_1 m_2$——两个自由度体系中的集中质量；

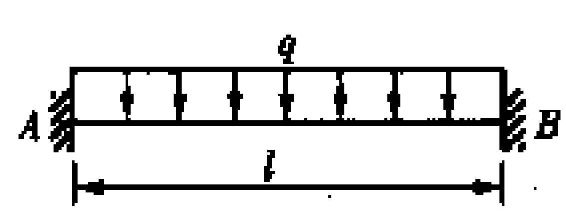
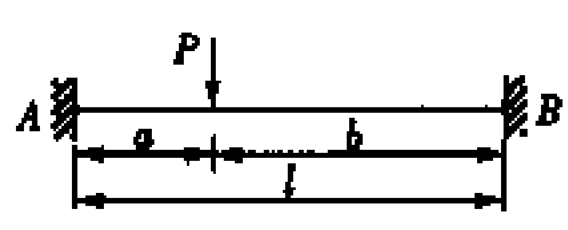
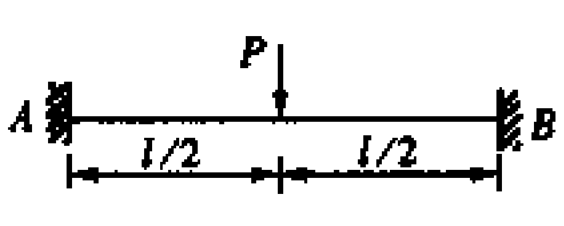
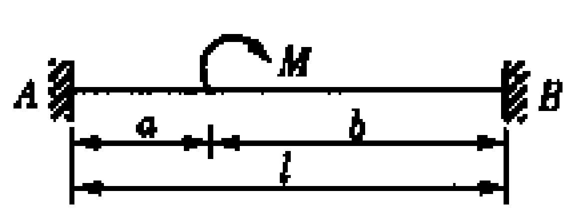
ω_1, ω_2——两自由度体系中两个自振频率即第一、第二圆频率；

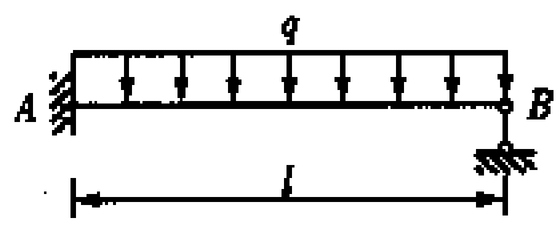
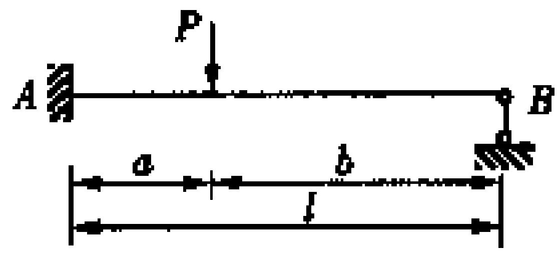
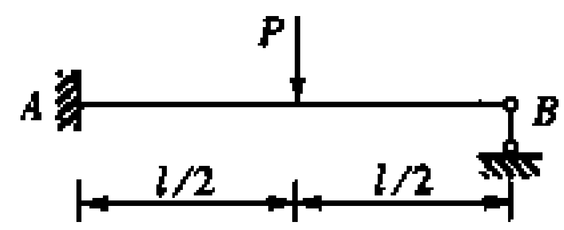
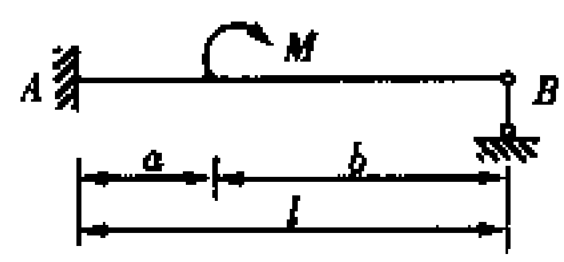
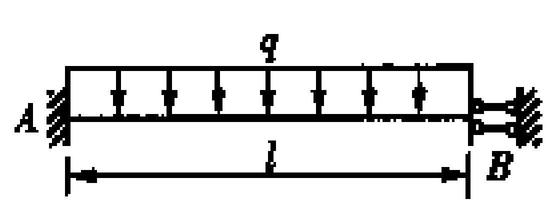
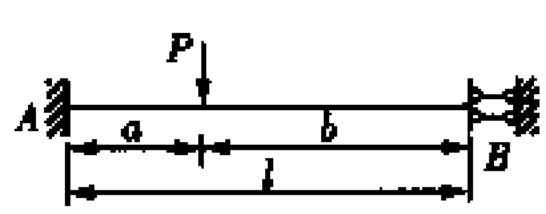
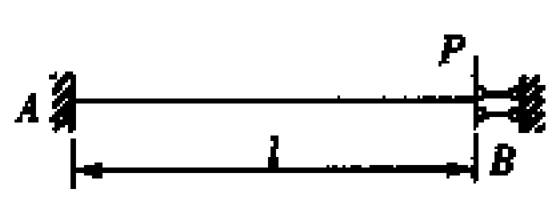
Y_{11}, Y_{21}——第一振型中质点 1，2 的振幅；

Y_{12}, Y_{22}——第二振型中质点 1，2 的振幅。

并且：$\lambda_1 = \dfrac{1}{\omega_1^2}, \lambda_2 = \dfrac{1}{\omega_2^2}$

(四) 等截面杆件的固端弯矩和剪力

情况	编号	简　　图	固端弯矩（以顺时针转向为正）	固端剪力
两端固定	1		$M_{AB} = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{BA} = +\frac{ql^2}{12}$	$Q_{AB} = \frac{ql}{2}$ $Q_{BA} = -\frac{ql}{2}$
	2		$M_{AB} = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_{BA} = +\frac{Pa^2b}{l^2}$	$Q_{AB} = \frac{Pb^2}{l^2}\left(1 + \frac{2a}{l}\right)$ $Q_{BA} = -\frac{Pa^2}{l^2}\left(1 + \frac{2b}{l}\right)$
	3		$M_{AB} = -\frac{Pl}{8}$ $M_{BA} = \frac{Pl}{8}$	$Q_{AB} = \frac{P}{2}$ $Q_{BA} = -\frac{P}{2}$
	4		$M_{AB} = \frac{Mb(3a - l)}{l^2}$ $M_{BA} = \frac{Ma(3b - l)}{l^2}$	$Q_{AB} = -\frac{6abM}{l^3}$ $Q_{BA} = -\frac{6abM}{l^3}$

情况	编号	简图	固端弯矩（以顺时针转向为正）	固端剪力
一端固定另一端铰支	1		$M_{AB}=-\frac{ql^2}{8}$	$Q_{AB}=\frac{5ql}{8}$ $Q_{BA}=-\frac{3ql}{8}$
	2		$M_{AB}=-\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	$Q_{AB}=\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$ $Q_{BA}=-\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$
	3		$M_{AB}=-\frac{3Pl}{16}$	$Q_{AB}=\frac{11P}{16}$ $Q_{BA}=-\frac{5P}{16}$
	4		$M_{AB}=\frac{l^2-3b^2}{2l^2}M$	$Q_{AB}=-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$ $Q_{BA}=-\frac{3(l^2-b^2)}{2l^3}M$
一端固定另端滑动支承	1		$M_{AB}=-\frac{ql^2}{3}$ $M_{BA}=-\frac{ql^2}{6}$	$Q_{AB}=ql$
	2		$M_{AB}=-\frac{Pa(l+b)}{2l}$ $M_{BA}=-\frac{Pa^2}{2l}$	$Q_{AB}=P$
	3		$M_{AB}=-\frac{Pl}{2}$ $M_{BA}=-\frac{Pl}{2}$	$Q_{AB}=P$

其中：M_{AB}——AB 梁 A 端的弯矩，Q_{AB}——AB 梁 A 端的剪力；

M_{BA}——AB 梁 B 端的弯矩，Q_{BA}——AB 梁 B 端的剪力。

十一、土力学与地基基础

（一）均布的矩形荷载角点下的竖向附加应力系数见表11-1。

均布的矩形荷载角点下的竖向附加应力系数　　表11-1

z/b	l/b							
	1.0	1.2	1.6	2.0	4.0	6.0	10.0	条形
0.0	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
0.4	0.240	0.242	0.243	0.244	0.244	0.244	0.244	0.244
0.8	0.200	0.207	0.215	0.218	0.220	0.220	0.220	0.220
1.2	0.152	0.163	0.176	0.182	0.188	0.189	0.189	0.189
1.6	0.112	0.124	0.140	0.148	0.159	0.160	0.160	0.160
2.0	0.084	0.095	0.110	0.120	0.135	0.137	0.137	0.137
2.4	0.064	0.073	0.088	0.098	0.116	0.118	0.119	0.119
2.8	0.050	0.058	0.071	0.080	0.100	0.104	0.105	0.105
3.2	0.040	0.047	0.058	0.067	0.087	0.092	0.093	0.094
3.6	0.033	0.038	0.048	0.056	0.076	0.082	0.084	0.084
4.0	0.027	0.032	0.040	0.048	0.067	0.073	0.076	0.076
5.0	0.018	0.021	0.027	0.033	0.050	0.057	0.061	0.062
6.0	0.013	0.015	0.020	0.024	0.039	0.046	0.051	0.052
8.0	0.007	0.009	0.011	0.014	0.025	0.031	0.037	0.039
10.0	0.005	0.006	0.007	0.009	0.017	0.022	0.028	0.032
20.0	0.001	0.001	0.002	0.002	0.005	0.007	0.010	0.016

注：l为矩形荷载（基础）的长边；b为矩形荷载（基础）的短边；z为计算点离荷载作用面的竖向距离。

（二）地基沉降的弹性力学公式

$$s = \frac{1-\mu^2}{E_0}\omega b P_0$$

式中　b——矩形荷载（基础）的宽度或圆形荷载（基础）的直径；

μ——地基泊松比；

E_0——地基变形模量（或地基弹性模量E）；

P_0——基底附加应力；

ω——沉降影响系数。

（三）地基沉降分层总和法公式

$$s = \sum_{i=1}^{n}\frac{e_{1i}-e_{2i}}{1+e_{1i}}H_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(P_{2i}-P_{1i})}{1+e_{1i}}H_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta P_i}{Es_i}H_i$$

式中　H_i——第i分层土的厚度；

P_{1i}——第i分层土的自重应力平均值；

承载力修正系数 **表 11-2**

土的类别		η_b	η_d
淤泥和淤泥质土		0	1.0
人工填土 e 或 I_L 大于等于 0.85 的粘性土		0	1.0
红粘土	含水比 $\alpha_w>0.8$	0	1.2
	含水比 $\alpha_w\leq0.8$	0.15	1.4
大面积压实填土	压实系数大于 0.95、粘粒含量 $\rho_c\geq10\%$ 的粉土	0	1.5
	最大干密度大于 $2.1t/m^3$ 的级配砂石	0	2.0
粉土	粘粒含量 $\rho_c\geq10\%$ 的粉土	0.3	1.5
	粘粒含量 $\rho_c\leq10\%$ 的粉土	0.5	2.0
e 及 I_L 均小于 0.85 的粘性土		0.3	1.6
粉砂、细砂（不包括很湿与饱和时的稍密状态）		2.0	3.0
中砂、粗砂、砾砂和碎石土		3.0	4.4

注：1 强风化和全风化的岩石，可参照所风化成的相应土类取值，其他状态下的岩石不修正；

2 地基承载力特征值按 GB50007—2002 附录 D 深层平板载荷试验确定时 η_d 取 0。

十二、结构设计

混凝土强度标准值（N/mm^2） **表 12-1**

强度种类	混凝土强度等级													
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
f_{ck}	10.0	13.4	16.7	20.1	23.4	26.8	29.6	32.4	35.5	38.5	41.5	44.5	47.4	50.2
f_{tk}	1.27	1.54	1.78	2.01	2.20	2.39	2.51	2.64	2.74	2.85	2.93	2.99	3.05	3.11

混凝土强度设计值（N/mm^2） **表 12-2**

强度种类	混凝土强度等级													
	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
f_c	7.2	9.6	11.9	14.3	16.7	19.1	21.1	23.1	25.3	27.5	29.7	31.8	33.8	35.9
f_t	0.91	1.10	1.27	1.43	1.57	1.71	1.80	1.89	1.96	2.04	2.09	2.14	2.18	2.22

注：1 计算现浇钢筋混凝土轴心受压及偏心受压构件时，如截面的长边或直径小于 300mm，则表中混凝土的强度设计值应乘以系数 0.8；当构件质量（如混凝土成型、截面和轴线尺寸等）确有保证时，可不受此限制；

2 离心混凝土的强度设计值应按专门标准取用。

混凝土弹性模量（$\times10^4N/mm^2$） **表 12-3**

混凝土强度等级	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
E_c	2.20	2.55	2.80	3.00	3.15	3.25	3.35	3.45	3.55	3.60	3.65	3.70	3.75	3.80

普通钢筋强度标准值（N/mm^2） **表 12-4**

种类		符号	d（mm）	F_{yk}
热轧钢筋	HPB235（Q235）	ϕ	8～20	235
	HRB335（20MnSi）	Φ	6～50	335
	HRB400（20MnSiV、20MnSiNb、20MnTi）	Φ	6～50	400
	RRB400（K20MnSi）	$Φ^R$	8～40	400

注：1 热轧钢筋直径 d 系指公称直径；

2 当采用直径大于 40mm 的钢筋时，应有可靠的工程经验。

预应力钢筋强度标准值（N/mm^2） **表 12-5**

种类		符号	d（mm）	f_{ptk}
钢绞线	1×3	ΦS	8.6、10.8	1860、1720、1570
			12.9	1720、1570
	1×7		9.5、11.1、12.7	1860
			15.2	1860、1720
消除应力钢丝	光面 螺旋肋	ΦP ΦH	4、5	1770、1670、1570
			6	1670、1570
			7、8、9	1570
	刻痕	ΦI	5、7	1570
热处理钢筋	40Si2Mn	ΦHT	6	1470
	48Si2Mn		8.2	
	45Si2Cr		10	

注：1 钢绞线直径 d 系指钢绞线外接圆直径，即现行国家标准《预应力混凝土用钢绞线》GB/T 5224 中的公称直径 D_g，钢丝和热处理钢筋的直径 d 均指公称直径；

2 消除应力光面钢丝直径 d 为 4～9mm，消除应力螺旋肋钢丝直径 d 为 4～8mm。

普通钢筋强度设计值（N/mm^2） **表 12-6**

种类		符号	f_y	f'_y
热轧钢筋	HPB 235（Q235）	Φ	210	210
	HRB 335（20MnSi）	Φ	300	300
	HRB 400（20MnSiV、20MnSiNb、20MnTi）	Φ	360	360
	RRB 400（K20MnSi）	Φ^R	360	360

注：在钢筋混凝土结构中，轴心受拉和小偏心受拉构件的钢筋抗拉强度设计值大于 300N/mm^2 时，仍应按 300N/mm^2 取用。

预应力钢筋强度设计值（N/mm^2） **表 12-7**

种类		符号	f_{ptk}	f_{py}	f'_{py}
钢绞线	1×3	ΦS	1860	1320	390
			1720	1220	
			1570	1110	
	1×7		1860	1320	390
			1720	1220	
消除应力钢丝	光面 螺旋肋	ΦP ΦH	1770	1250	410
			1670	1180	
			1570	1110	
	刻痕	ΦI	1570	1110	410
热处理钢筋	40Si2Mn	ΦHT	1470	1040	400
	48Si2Mn				
	45Si2Cr				

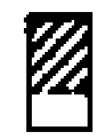
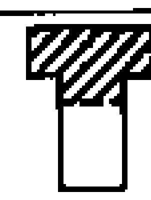
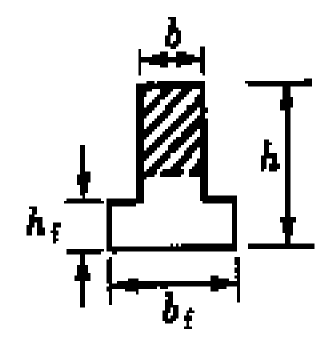
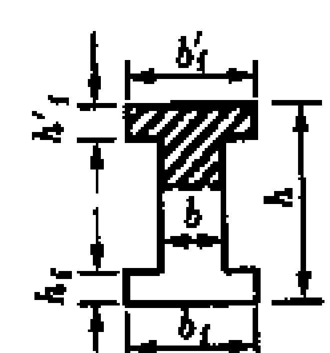
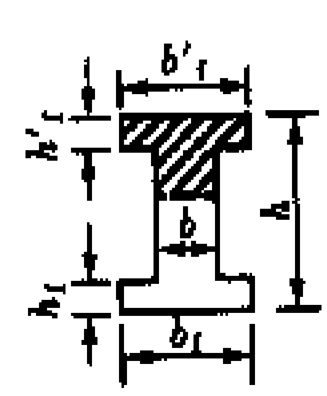
注：当预应力钢绞线、钢丝的强度标准值不符合表 12-5 的规定时，其强度设计值应进行换算。

钢筋弹性模量（$\times 10^5 N/mm^2$） **表 12-8**

种　　类	E_s
HPB　235 级钢筋	2.1
HRB　335 级钢筋、HRB　400 级钢筋、RRB　400 级钢筋、热处理钢筋	2.0
消除应力钢丝（光面钢丝、螺旋肋钢丝、刻痕钢丝）	2.05
钢绞线	1.95

注：必要时钢绞线可采用实测的弹性模量。

截面抵抗矩塑性系数表 **表 12-9**

截　面　特　征	γ_m	截　面　图　形
矩形截面	1.75	
翼缘位于受压区的 T 形截面	1.75	
翼缘位于受拉区的 T 形截面		
1) $\frac{b_f}{b} \leqslant 2.0$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.75	
2) $\frac{b_f}{b} > 2.0$，$\frac{h_f}{h} \geqslant 0.2$	1.75	
3) $\frac{b_f}{b} > 2.0$，$\frac{h_f}{h} < 0.2$	1.50	
对水平轴对称的 I 形或箱形截面		 $b_f = b'_f$ $h_f = h'_f$
1) $\frac{b_f}{b} \leqslant 2.0$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.75	
2) $2 < \frac{b_f}{b} \leqslant 6$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.50	
3) $\frac{b_f}{b} > 6$，$\frac{h_f}{h} \geqslant 0.2$	1.50	
4) $6 < \frac{b_f}{b} \leqslant 15$，$\frac{h_f}{h} < 0.2$	1.25	
5) $\frac{b_f}{b} > 15$，$\frac{h_f}{h} < 0.1$	1.10	
对水平轴不对称的 I 形或箱形截面		
1) $\frac{b'_f}{b} \leqslant 3$，$\frac{b_f}{b} \leqslant 2$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.75	
2) $\frac{b'_f}{b} \leqslant 3$，$2 < \frac{b_f}{b} \leqslant 5$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.50	
3) $\frac{b'_f}{b} \leqslant 3$，$\frac{b_f}{b} > 6$，$\frac{h_f}{h} > 0.1$	1.50	
4) $3 < \frac{b'_f}{b} < 8$，$\frac{b_f}{b} \leqslant 4$，$\frac{h_f}{h}$ 为任意值	1.50	
5) $3 < \frac{b'_f}{b} < 8$，$\frac{b_f}{b} > 4$，$\frac{b_f}{h} \geqslant 0.2$	1.50	
6) $3 < \frac{b'_f}{b} < 8$，$\frac{b_f}{b} > 4$，$\frac{h_f}{h} < 0.2$	1.25	
7) $\frac{b'_f}{b} \geqslant 8$，$\frac{h_f}{h} > 0.3$	1.50	
8) $\frac{b'_f}{b} \geqslant 8$，$\frac{h_f}{h} \leqslant 0.3$	1.25	

钢材和钢铸件的物理性能指标

表 12-11

弹性模量 E (N/mm^2)	剪变模量 G (N/mm^2)	线膨胀系数 α (以每℃计)	质量密度 ρ (kg/m^3)
206×10^3	79×10^3	12×10^{-6}	7850

3 号钢（Q235 钢）钢材分组尺寸（mm）

表 12-12

组别	圆钢、方钢和扁钢的直径或厚度	角钢、工字钢和槽钢的厚度	钢板的厚度
第 1 组	≤40	≤15	≤20
第 2 组	>40～100	>15～20	>20～40
第 3 组		>20	>40～50

注：工字钢和槽钢的厚度系指腹板的厚度。

钢材的强度设计值（N/mm^2）

表 12-13

钢材			抗拉、抗压和抗弯 f	抗剪 f_v	端面承压（刨平顶紧）f_{ce}
钢号	组别	厚度或直径 (mm)			
3 号钢 (Q235 钢)	第 1 组	—	215	125	320
	第 2 组	—	200	115	320
	第 3 组	—	190	110	320
16Mn 钢、	—	≤16	315	185	445
	—	17～25	300	175	425
16Mnq 钢	—	26～36	290	170	410
15MnV 钢、	—	≤16	350	205	450
	—	17～25	335	195	435
15MnVq 钢	—	26～36	320	185	415

注：3 号镇静钢钢材的拉抗、抗压、抗弯和抗剪强度设计值，可按表中的数值增加 5%。

焊缝的强度设计值（N/mm^2）

表 12-14

焊接方法和焊条型号	构件钢材			对接焊缝				角焊缝
	钢号	组别	厚度或直径（mm）	抗压 f_c^w	焊缝质量为下列级别时，抗拉和抗弯 f_t^w		抗剪 f_v^w	抗拉、抗压和抗剪 f_f^w
					一级、二级	三级		
自动焊、半自动焊和 E43××型焊条的手工焊	3 号钢 (Q235 钢)	第 1 组	—	215	215	185	125	160
		第 2 组	—	200	200	170	115	160
		第 3 组	—	190	190	160	110	160
自动焊、半自动焊和 E50××型焊条的手工焊	16Mn 钢、16Mnq 钢	—	≤16	315	315	270	185	200
		—	17～25	300	300	255	175	200
		—	26～36	290	290	245	170	200
自动焊、半自动焊和 E55××型焊条的手工焊	15MnV 钢、	—	≤16	350	350	300	205	220
		—	17～25	335	335	285	195	220
	15MnVq 钢	—	26～36	320	320	270	185	220

注：自动焊和半自动焊所采用的焊丝和焊剂，应保证其熔敷金属抗拉强度不低于相应手工焊焊条的数值。

螺栓连接的强度设计值（N/mm²）　　表 12-15

螺栓的钢号（或性能等级）和构件的钢号		构件钢材		普通螺栓						锚栓	承压型高强度螺栓	
				C级螺栓			A级、B级螺栓					
		组别	厚度（mm）	抗拉 f_t^b	抗剪 f_v^b	承压 f_c^b	抗拉 f_t^b	抗剪（I类孔）f_v^b	承压（I类孔）f_c^b	抗拉 f_t^a	抗剪 f_v^b	承压 f_c^b
普通螺栓	3号钢（Q235钢）	—		170	130	—	170	170	—	—	—	—
锚栓	3号钢（Q235钢）	—		—	—	—	—	—	—	140	—	—
	16Mn钢	—		—	—	—	—	—	—	180	—	—
承压型高强度螺栓	8.8级	—		—	—	—	—	—	—	—	250	—
	10.9级	—		—	—	—	—	—	—	—	310	—
构　件	3号钢（Q235钢）	第1～3组	—	—	—	305	—	—	400	—	—	465
	16Mn钢、16Mnq	—	≤16	—	—	420	—	—	550	—	—	640
		—	17～25	—	—	400	—	—	530	—	—	615
		—	26～36	—	—	385	—	—	510	—	—	590
	15MnV钢 15MnVq钢	—	≤16	—	—	435	—	—	570	—	—	665
		—	17～25	—	—	420	—	—	550	—	—	640
		—	26～36	—	—	400	—	—	530	—	—	615

注：孔壁质量属于下列情况者为Ⅰ类孔：

1）在装配好的构件上按设计孔径钻成的孔；

2）在单个零件和构件上按设计孔径分别用钻模钻成的孔；

3）在单个零件上先钻成或冲成较小的孔径，然后在装配好的构件上再扩钻至设计孔径的孔。

砖砌体的抗压强度标准值 f_k（MPa）　　表 12-16

砖强度等级	砂浆强度等级					砂浆强度
	M15	M10	M7.5	M5	M2.5	0
MU30	6.30	5.23	4.69	4.15	3.61	1.84
MU25	5.75	4.77	4.28	3.79	3.30	1.68
MU20	5.15	4.27	3.83	3.39	2.95	1.50
MU15	4.46	3.70	3.32	2.94	2.56	1.30
MU10	3.64	3.02	2.71	2.40	2.09	1.07

烧结普通砖和烧结多孔砖砌体的抗压强度设计值（MPa）　　表 12-17

砖强度等级	砂浆强度等级					砂浆强度
	M15	M10	M7.5	M5	M2.5	0
MU30	3.94	3.27	2.93	2.59	2.26	1.15
MU25	3.60	2.98	2.68	2.37	2.06	1.05
MU20	3.22	2.67	2.39	2.12	1.84	0.94
MU15	2.79	2.31	2.07	1.83	1.60	0.82
MU10	—	1.89	1.69	1.50	1.30	0.67

钢筋的计算截面面积及公称质量

钢筋的计算截面面积及公称质量表　　　　表 12-18

直径 d mm	不同根数钢筋的计算截面面积 (mm^2)									单根钢筋公称质量 (kg/m)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	7.1	14.1	21.2	28.3	35.3	42.4	49.5	56.5	63.6	0.055
4	12.6	25.1	37.7	50.2	62.8	75.4	87.9	100.5	113	0.099
5	19.6	39	59	79	98	118	138	157	177	0.154
6	28.3	57	85	113	142	170	198	226	255	0.222
6.5	33.2	66	100	133	166	199	232	265	299	0.260
8	50.3	101	151	201	252	302	352	402	453	0.395
8.2	52.8	106	158	211	264	317	370	423	475	0.432
10	78.5	157	236	314	393	471	550	628	707	0.617
12	113.1	226	339	452	565	678	791	904	1017	0.888
14	153.9	308	461	615	769	923	1077	1230	1387	1.21
16	201.1	402	603	804	1005	1206	1407	1608	1809	1.58
18	254.5	509	763	1017	1272	1526	1780	2036	2290	2.00
20	314.2	628	941	1256	1570	1884	2200	2513	2827	2.47
22	380.1	760	1140	1520	1900	2281	2661	3041	3421	2.98
25	490.9	982	1473	1964	2454	2945	3436	3927	4418	3.85
28	615.3	1232	1847	2463	3079	3695	4310	4926	5542	4.83
32	804.3	1609	2418	3217	4021	4826	5630	6434	7238	6.31
36	1017.9	2036	3054	4072	5089	6107	7125	8143	9161	7.99
40	1256.1	2513	3770	5027	6283	7540	8796	10053	11310	9.87

注：表中直径 $d=8.2$mm 的计算截面面积及公称质量仅适用于有纵肋的热处理钢筋。

十三、建筑施工与管理

1. 用“相当梁法”计算板桩的计算假定

用相当梁法计算板桩的计算图式（图 13-1）：

$$A=\gamma t_0 \mathrm{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)\qquad B=\gamma(H-t_0)\mathrm{tg}^2\left(45^\circ-\frac{\phi}{2}\right)$$

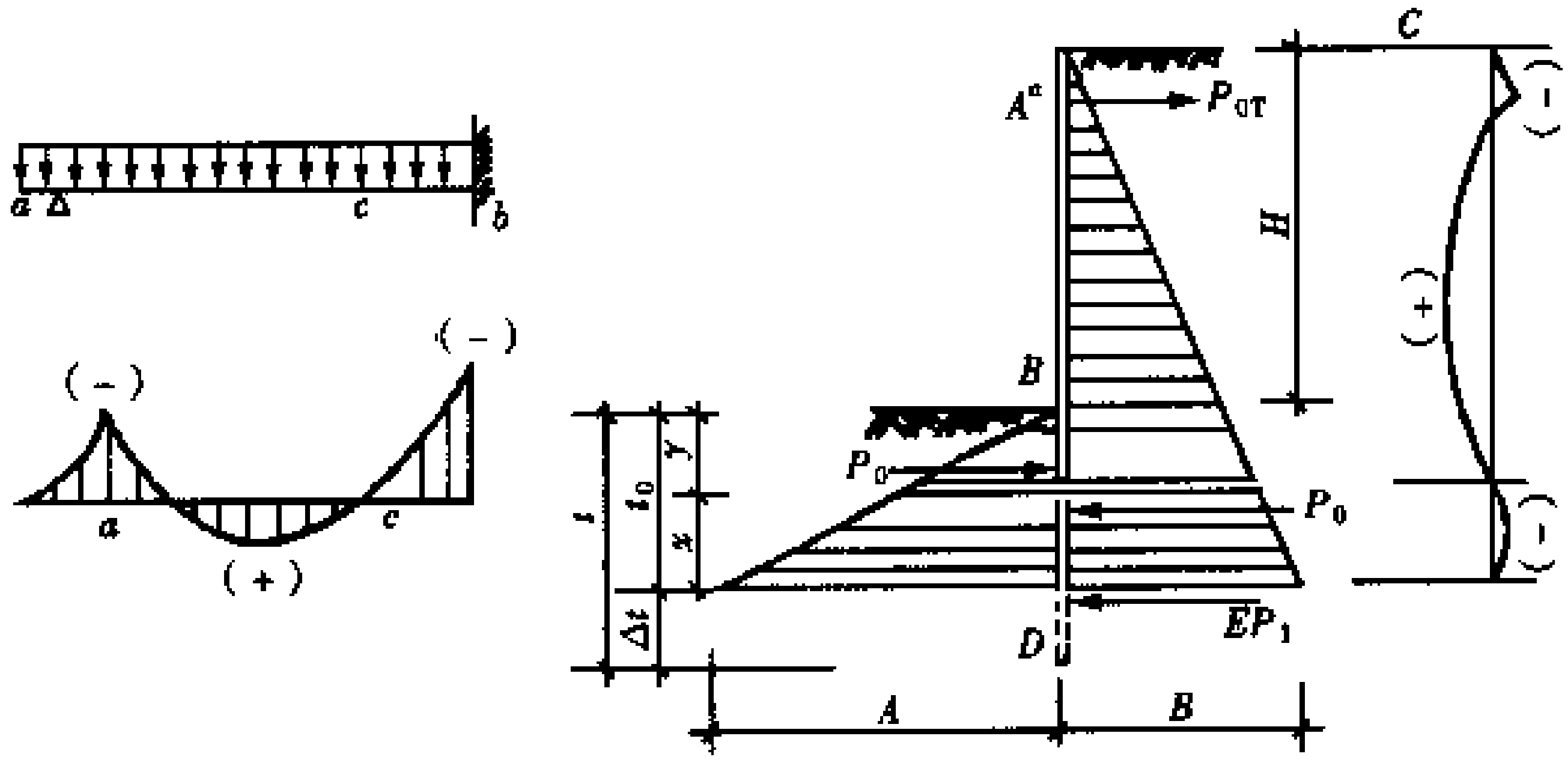


图 13-1

2. 无压完整井的环状井点系统的涌水量

计算公式：

$$Q = 1.366K\frac{(2H-S)S}{\lg R - \lg x_0}$$

式中　Q——井点系统的涌水量（m^3/d）；

K——土壤的渗透系数（m/d），可以由实验室或现场抽水试验确定；

H——含水层厚度（m）；

S——水位降低值（m）；

R——抽水影响半径（m），常用下式计算：

$$R = 1.95S\sqrt{HK}(m)$$

x_0——环状井点系统的假想半径（m），可按下式计算：

$$x_0 = \sqrt{\frac{F}{\pi}}(m)$$

式中　F——环状井点系统所包围的面积（m^2）。

3. 承压完整井环状井点涌水量

计算公式：

$$Q = 2.73K\frac{MS}{\lg R - \lg x_0}(m^3/d)$$

式中　M——承压含水层厚度；K、R、x_0、S——与上式相同。

4. 单根井管的最大出水量

计算公式：

$$q = 65\pi dl\sqrt[3]{K}(m^3/d)$$

式中　d——滤管直径（m）；

l——滤管长度（m）；

K——渗透系数（m/d）。

5. 井点最少数量

中点最少数量由下式确定：

$$n' = \frac{Q}{q}(根)$$

6. 井点管最大间距

井点最大间距由下式得：

$$D' = \frac{L}{n'}(m)$$

式中　L——总管长度（m）；

n'——井点管最少根数。

7. 采用内部振动器

采用内部振动器时，新浇筑的普通混凝土作用于模板上的最大侧压力可按下列二式计算，取其中的较小值：

$$F = 0.22\gamma_c t_0\beta_1\beta_2 V^{1/2}$$

$$F = \gamma_c H$$

式中　F——新浇筑混凝土对模板的最大侧压力（kN/m^2）；

V——混凝土的浇筑速度（m/h）；

γ_c——混凝土的重力密度（N/m^3）；

t_0——新浇混凝土的初凝时间（h），可按实测确定。当缺乏试验资料时，可采用 $t_0 = 200/(T+15)$ 计算（T 为混凝土的温度℃）；

H——混凝土侧压力计算位置处至新浇混凝土顶面的总高度（m）；

β_1——外加剂影响修正系数，不掺外加剂时取 1.0，掺加具有缓凝作用的外加剂时取 1.2；

β_2——混凝土坍落度修正系数，当坍落度小于 30mm 时，取 0.85；50～90mm 时，取 1.0；110～150mm 时，取 1.15。

8. 浇筑大体积混凝土

浇筑大体积混凝土时，为保证混凝土整体性，混凝土单位时间的最小浇筑量公式：

$$Q = F \cdot H/T(m^3/h)$$

式中 Q——混凝土最小浇筑量（m^3/h）；

F——混凝土浇筑区的面积（m^2）；

H——浇筑层厚度（m）；

T——下层混凝土从开始浇筑到初凝为止所容许的时间间隔（h）。

9. 钢筋冷拉设备的冷拉能力

计算公式：

$$Q = \frac{10S}{K'} - F$$

$$K' = \frac{f^{n-1}(n-1)}{f^n - 1}$$

式中 Q——冷拉设备冷拉能力（kN）；

S——卷扬机吨位（t）；

F——设备阻力（kN）；

K'——滑轮组的省力系数；

f——单个滑轮的阻力系数；

n——滑轮组的工作线数。

10. 预应力筋的成品长度（即预应力筋和螺丝端杆对焊并经冷拉后的全长）L_1：

$$L_1 = l + 2l_2$$